

A. R. Crathorne

ANALYTISCHE DARSTELLUNG DER VARIATIONS-RECHNUNG,

MIT ANWENDUNG DERSELBEN AUF DIE BESTIMMUNG DES GRÖSSTEN UND KLEINSTEN,

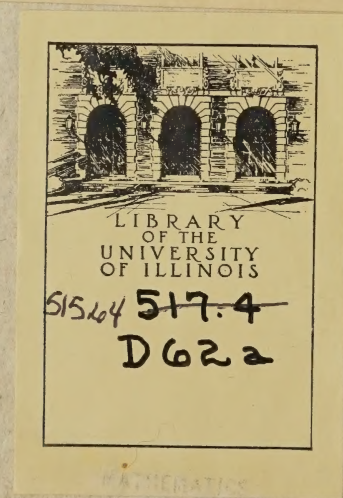
VON

E. H. DIRKSEN,

DOCTOR DER PHILOSOPHIE, AUSSERORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITAET ZU BERLIN, UND LEHRER DER OPT. UND ASTRONOM. WISSENSCHAFTEH AN DER KÖNIGL. ALLGEM. KRIEGESSCHULE EBENDASELBST.

BERLIN, 1823.

IN DER ADOLPH MARTIN SCHLESINGERSCHEN BUCH- UND MUSIKHANDLUNG.


LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF ILLINOIS

A. R. Crathorne

ANALYTISCHE DARSTELLUNG
DER
VARIATIONS-RECHNUNG,

MIT ANWENDUNG DERSELBEN
AUF DIE BESTIMMUNG
DES GRÖSSTEN UND KLEINSTEN,

VON

E. H. DIRKSEN,

DOCTOR DER PHILOSOPHIE, AUSSERORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITAET ZU BERLIN, UND LEHRER DER OPT. UND ASTRONOM. WISSENSCHAFTEH AN DER KÖNIGL. ALLGEM. KRIEGESSCHULE EBENDASELBST.

BERLIN, 1823.

IN DER ADOLPH MARTIN SCHLESINGERSCHEN BUCH- UND MUSIKHANDLUNG.

DEUS NOBIS HAEC OTIA FECIT.

Vorrede.

Es ist wohl nicht zu verkennen, dass, bei den vielseitigen Bestrebungen, die, theils zur Erweiterung, theils zur festern Begründung der transcendenten Analysis, mit so ausgezeichnetem Erfolge, angewandt worden sind, die Variations-Rechnung, welche unstreitig auf der höchsten Abstraction beruht, zu der sich die Mathematik bis jetzt erhoben hat, zu lange unberücksichtigt geblieben ist. Denn, in derselben Gestalt, in welcher sie von ihrem grossen Erfinder, Lagrange, geschaffen, und von dem unsterblichen Euler weiter ausgebildet wurde, gieng sie, oft leider noch auf eine sehr unvollständige Weise, in die Lehrbücher der Integral-Rechnung über, und befindet sie sich noch. Im Gegentheil ist sogar die Meinung ausgesprochen worden, dass entweder es überhaupt nicht möglich seyn dürfte, ihr ein evidenteres Prinzip unterzulegen *), oder dass solches

*) Textor in seinem Werke über die höhere Analysis.

nur mit Aufopferung ihrer Einfachheit und Eleganz würde geschehen können *).

Der Verfasser der vorliegenden Schrift, der zwischen dem Prinzipe und dem Algorithmus in der Analysis einen wesentlichen Unterschied zu finden glaubt, kann so wenig die eine, als die andere dieser Aeusserungen unterschreiben, und es ist besonders die erstere, welche ihn angeregt hat, seine Kräfte in dieser Beziehung zu prüfen. So entstand das Werk, welches er hiemit dem mathematischen Publicum anzubieten wagt, und mit welchem er keine andere Absicht verbindet, als dem Gegenstande eine Darstellung zu verschaffen, die, sowohl in Beziehung auf die Prinzipien, als die Form, den Umfang, und den Zusammenhang, dem gegenwärtigen Zustande der Analysis mehr angemessen seyn sollte.

Das Werk zerfällt in vier Kapitel, von denen das erste die Prinzipien des Calcüls enthält. Der Verfasser fand es dem vorgesetzten Zwecke angemessen, die bisherige, unstreitig etwas beschränkte Definition von Variation, und deren Versinnlichung durch geometrische Betrachtungen, gänzlich fallen zu lassen, an deren Statt eine allgemeinere, rein analytische zu stellen, und die daraus erwachsende Aufgabe mit Beziehung auf die verschiedenen analytischen Hauptformen nach und nach zur Lösung zu bringen. Dies ist der Inhalt des ersten Kapitels, welches

*) Laecroix in der Vorrede zu seinem *Traité du calcul diff. et integral.*

also, der Form nach neu, Betrachtungen enthält, die, mit einer geringen Ausnahme, der Variations-Rechnung bisher fremd waren.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich vorzugsweise mit demjenigen, was den Gegenstand der gewöhnlichen Variations-Rechnung auszumachen pflegt, hier aber als eine besondere Aufgabe, und, in gewisser Beziehung, von der niedrigsten Potenz erscheint. Der Verfasser schmeichelt sich indess, dass die Darstellung dieser Materie, sowohl in Rücksicht der Ordnung, als der Form, Vollständigkeit und Allgemeinheit, gewonnen habe.

Das dritte Kapitel enthält die Anwendung der Variations-Rechnung auf die Bestimmung des Grössten und Kleinsten. In Folge des rein analytischen Standpunktes, von welchem der Verfasser seinen Auslauf genommen hat, wird auch diese Aufgabe in eben dem Sinne aufgestellt, und für eine jede der Hauptformen zur Lösung gebracht. Damit die Bedeutung dieses Problems und die Modificationen, welche die Lösung desselben, nach Massgabe der zu Grunde liegenden analytischen Formel annimmt, desto klarer hervortreten, wird dieselbe von Vorne aufgenommen, und bis zu den unbestimmten Integral-Ausdrücken allmählig fortgeführt. Wiewohl der Verfasser hier wiederum das Gebiet der gewöhnlichen Variations-Rechnung zu betreten anfing; so forderte dennoch mehreres eine tiefer

eingehende Betrachtung. Die Weise, auf welche überhaupt nur der, dem Maximum und Minimum gemeinschaftlichen Bedingung genügt werden kann; der analytische Sinn der Grenzgleichungen; ihre Anzahl nach Massgabe der Form des vorgegebenen Integral-Ausdruckes; die Art, auf welche schon diese die Existenz eines Maximums oder Minimums bedingen; das Criterium in dieser Beziehung, aus der Variation der zweiten Ordnung entlehnt; die Methode, Bedingungsgleichungen für die Grenzen, besonders unter einem geometrischen Gesichtspunkte gegeben, zu berücksichtigen, — dies sind die Punkte, welche er, theils zur Sprache zu bringen, theils umständlicher zu erörtern sich bestrebt hat, als solches bisher geschehen war. Zur Verdeutlichung des Gegenstandes ist dieses Kapitel mit Beispielen durchwebt worden.

Um die Darstellung der Methode, auf welche der Verfasser sein Hauptaugenmerk gerichtet hatte, nicht zu unterbrechen, hatte er sich genöthigt gesehen, mehrere Bemerkungen, die nicht ganz ohne Interesse seyn dürften, unerörtert zu lassen. Sowohl um diese nachzuholen, als auch aus Rücksicht auf die Newtonische Sentenz: *in addiscendis scentiis exempla plus prosunt, quam praecepta,* ist ein viertes Kapitel hinzugefügt worden, welches eine kleine Sammlung von Beispielen enthält, bei deren Auswahl also besonders die formale Seite in Betracht gezogen worden ist. Dieselben sind grösstentheils aus dem Werke

jenes ausserordentlichen Mannes, dessen Andenken die Kenner mit Recht ihre Verehrung und Bewunderung zollen, entlehnt worden, bekannt unter dem Titel: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes etc. Lausannae*, 1744. Der Verfasser schmeichelt sich, dass eine aufmerksame Vergleichung der dortigen Auflösungen mit den jetzigen den ihnen hier gewidmeten Platz rechtfertigen werde.

Die Vergleichung der vorliegenden Schrift mit der spätesten Arbeit Lagrange's über diesen Gegenstand, und nahmentlich mit dem letzten Abschnitt in der zweiten Ausgabe seiner *Leçons sur le calcul des Fonctions*, welche Ausgabe der Verfasser übrigens erst während der Bearbeitung dieses Werkes kennen lernte, wird zwar eine Uebereinstimmung in einigen der Grundbegriffe, aber auch eine merkliche Verschiedenheit in der Entwickelung derselben wahrnehmen lassen; indem es besonders die beabsichtigte grössere Allgemeinheit war, die den Verfasser zu seiner Darstellung führte. Die schönen Eliminations-Methoden indess, mit welchen der grosse Mann seine Darstellung, obgleich nur factisch, ausgestattet hat, sind so viel als möglich benutzt worden.

Zur sinnlichen Darstellung seiner Begriffe hat es der Verfasser angemessen gefunden, sich ein paar neuer Benennungen zu bedienen; und obgleich er sich übrigens, um sich gegen den Schein einer blossen Neuerungssucht so viel als möglich

zu verwahren, an die Leibnitz-Eulersche Bezeichnung, nach welcher die partiellen Differenzial-Coefficienten umklammert werden, anzuschliessen bestrebt hat, so sind die Klammern dennoch hin und wieder auch gebraucht worden, um Exponenten an diese Grössen anzuhängen. Sowohl mit Beziehung auf die eine, als auf die andere dieser Kleinigkeiten, wie auch mit Beziehung auf die, aller angewandten Sorgfalt ungeachtet, zurückgebliebenen Druckfehler, von denen ein Verzeichniss dem Werke beigefügt worden ist, hofft er, auf die Nachsicht der Kenner rechnen zu dürfen.

Besonders erfreulich würde es dem Verfasser seyn, wenn es ihm zugleich gelungen wäre, auch nur den Wenigen im Deutschen Vaterlande in ihren Bestrebungen einigen Vorschub zu leisten, die den innern Beruf fühlen, sich dem Studium einer Wissenschaft zu widmen, die unstreitig eben so sehr ihre Schwierigkeiten, als ihre eigenthümlichen Reize hat.

Inhalt.



Druckfehler.

Seite 6, Zeile 4 v. unt., anstatt $dV^{(1)}$ lies $dV_{(1)}$.
— 6, — 3 - - — $d_{(1)}y$ — $dy_{(1)}$.
— 6, — 1 - - — $\left(\frac{dV_{(1)}}{dy_{(1)}}\right)dy^{(1)}$ lies $\left(\frac{dV_{(1)}}{dy_{(1)}}\right)dy_{(1)}$.
— 8, — 15 v. oben, — $W^{(1)}$ lies $W_{(1)}$.
— 9, — 3 v. unt., — so, lies so erlangt man.
— 13, — 1 v. oben — Differenzialien lies Differenziale.
— 14, — 14 - - — könneu lies können,
— 18, — 8 - - — und V lies und δV.
— 32, = 1 - - — wehl lies wohl.
— 36, — 1 - - — absrahirt lies abstrahirt.
— 37, — 1 - - — folglich da lies folglich, da.
— 39, — 6 - - — $\overset{r}{\underset{1\ldots p}{\Sigma}} \mp \frac{d^r T}{dx^r}$ lies $\overset{r}{\underset{1\ldots p}{\Sigma}} \pm \frac{d^r T}{dx^r}$
— 39, — 7 - - — $\overset{r}{\underset{1\ldots q}{\Sigma}} \mp \frac{d^r U}{dx^r}$ lies $\overset{r}{\underset{1\ldots q}{\Sigma}} \pm \frac{d^r U}{dx^r}$.
— 41, — 11 - - — beide diese lies diese beiden.
— 57, — 5 v. unt., — $\Omega^{(\lambda+1)}$ lies $\Omega^{(\lambda+2)}$.
— 66, — 5 v. oben, — offenbar zu einer lies offenbar, wofern man die μ^{te} in Δ enthaltene Constante dergestalt bestimmt, dass $\Sigma \mp \frac{d^{r-1}\Delta_{(2)}\Psi_{(2)}}{db^{r-1}} = 1$ sei, zu einer u. s. w.
— 72, — 7, v. unt., — $\left(\frac{d^r \, \delta z^{(b')}}{db'^r}\right)$ lies $\left(\frac{d^r z_{(b')}}{db'^r}\right)$.

Von Seite 75 bis 199 im Columnen-Titel anstatt Gröst. lies Grösst.

Seite 77, Zeile 6 v. unt., anstatt so wohl lies sowohl.

— 82, — 2 - - — subsituirt lies substituirt.

— 86, — 3 v. oben, — $\frac{\left(H-\frac{BG}{2f}\right)^2}{4g}$ lies $\frac{\left(H-\frac{BG}{2f}\right)^2}{4g}$ — .

— 99, — 1 v. unt., — abschneide lies abschneidet.

— 99, — 1 - - — ist lies sei.

— 101, — 6 v. oben, — abschneide lies abschneidet.

— 101, — 7 - - — ist lies sei.

— 101, — 16 - - — Achse lies Axe.

— 114, — 5 v. unt., — $x^{(m-1)}\left(\frac{d^{m-1}\partial y}{dx^{m-1}}\right)$ lies $\frac{x^{(m-1)}}{2}\left(\frac{d^{m-1}\partial y}{dx^{m-1}}\right)^2$,

— 125, — 2 - - — $\frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{x}$ lies $\frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{x}}$

— 132, — 1 v. oben, — Andern lies andern.

— 135, — 2 v. unt., füge hinzu: $= o$.

— 190, — 4 v. oben, anstatt *Iutegral-Formelu* lies *Integral-Formeln*

— 195, — 6 v. unten — parziellen lies partiellen.

— 203, — 8 v. oben, — negative lies negativ.

— 210, — 7 - - — woraus $b^2\beta = a^2\beta$ lies woraus $b^2\beta = a^2\beta$, und ferner $a^2 + 1 = o$ hervorgeht, welches u. s. w.

— 217, — 1 - - — $\frac{dy_{(2)}}{da}$ lies $\frac{dy_{(2)}}{db}$

— 226, — 2 v. unt., — Integrationszeichen lies Integrations-Zeichen.

ERSTES KAPITEL.

Darstellung der Prinzipien der Variations-Rechnung.

§. 1.

Bekanntlich ist der Begriff einer Funktion von *veränderlichen* Grössen der Grundbegriff der gesammten Analysis. *Funktion* nennt man nehmlich jede Grösse, deren Werth von dem Werthe anderer Grössen, die als *unmittelbar* gegeben angesehen werden, nach irgend einem, es sei bekannten oder unbekannten, Gesetze abhängig ist. Man pflegt eine solche Grösse auch wohl die abhängige, und die als unmittelbar gegeben betrachteten die unabhängigen zu nennen. In so fern nun letztere als veränderlich angesehen werden, wird auch erstere als veränderlich gedacht werden müssen. Die Betrachtung der Veränderung, welche der Werth einer abhängigen Grösse erleidet, wenn die Werthe der unabhängigen geändert werden, enthält die Grundlage der Differenzial-Rechnung.

Inzwischen ist die Sache noch einer modificirten Ansicht fähig. Anstatt nehmlich die veränderlichen Grössen, von denen eine Funktion abhängig ist, alle als unabhängig von einander und als *unmittelbar* gegeben zu betrachten, wird man auch einige derselben als Funk-

tionen von den übrigen ansehen können, und zwar dergestalt, dass die Gesetze der Abhängigkeit selbst veränderlich und jeder beliebigen Form fähig seien.

Es sei V irgend eine gegebene Funktion von $x, y, z, \ldots t, u, \ldots;$ in Zeichen:

$$V = F(x, y, z \ldots t, u \ldots),$$

wo $x, y, z \ldots$ unmittelbar gegebene, $t, u \ldots$ hingegen beliebige, von einander unabhängige Funktionen von $x, y, z \ldots$ bezeichnen, so dass, wenn man diese durch $\varphi(x, y, z \ldots)$, $\varphi_{(1)}(x, y, z, \ldots)$ u. s. w. andeutet, man habe:

$$V = F[x, y, z \ldots \varphi(x, y, z, \ldots), \varphi_{(1)}(x, y, z \ldots) \ldots].$$

Alsdann ist es einleuchtend, dass der jedesmalige Werth von V ein anderer seyn wird, jenachdem für $x, y, z \ldots$ andere Werthe, und für $\varphi(x, y, z \ldots)$, $\varphi_{(1)}(x, y, z \ldots)$, andere Funktionen von $x, y, z \ldots$ angenommen werden. Die Betrachtung der Veränderung, welche für den Werth einer Grösse, wie V, entsteht, wenn die Werthe der unmittelbar gegebenen Grössen $x, y, z \ldots$ nebst den Formen jener Funktionen $\varphi(x, y, z \ldots)$, $\varphi_{(1)}(x, y, z \ldots) \ldots$ Aenderungen erleiden, enthält die Grundlage der Variations-Rechnung.

§. 2.

Beim ersten Anblick könnte es vielleicht etwas beschwerlich scheinen, sich die Grössen $\varphi(x, y, z \ldots)$, $\varphi_{(1)}(x, y, z \ldots)$ u. s. w., um uns an die obige Bezeichnung zu halten, ihrer Form nach, dergestalt als veränderlich vorzustellen, dass zugleich die Werthe, welche sie für bestimmte Werthe der als unmittelbar gegeben betrachteten Grössen erlangen, als stetig erscheinen; — eine Forderung, auf welche nicht verzichtet werden darf, so fern V als eine stetige Grösse ge-

dacht werden soll. In dieser Beziehung verdient bemerkt zu werden, dass, da $\varphi\,(x, y, z\ldots)$, $\varphi_{(1)}\,(x, y, z\ldots)$ u. s. w., in ihren allmähligen Veränderungen, stets Funktionen von $x, y, z\ldots$ bleiben, ihre Incremente, allgemein zu reden, gleichfalls als Funktionen von $x, y, z\ldots$ gedacht werden müssen, und die Schwierigkeit darauf zurückkommt, sich diese nach Belieben klein oder gross zu denken, wenn gleich für $x, y, z\ldots$ bestimmte Werthe zu Grunde liegen. Um diese Schwierigkeit zu heben, wird man sich die Incremente unter der Form $\alpha f(x, y, z\ldots)$, $\beta f_{(1)}(x, y, z\ldots)$ u. s. w. vorstellen können, wo $\alpha, \beta\ldots$ Grössen bezeichnen, die von $x, y, z\ldots$ unabhängig sind, und durch deren jedesmalige Bestimmung die Incremente selbst jeden Werth erlangen können.

Der Kürze wegen wollen wir Grössen, wie $x, y, z\ldots$ in obiger Gleichung, *absolut-unabhängige*, Grössen, wie $\varphi(x,y,z\ldots)$, $\varphi_{(1)}(x,y,z\ldots)$, *relativ-unabhängige*, und Grössen, wie V, *abhängige* Grössen nennen. Auch sollen die relativ-unabhängigen Grössen $\varphi(x, y, z\ldots)$, $\varphi_{(1)}(x, y, z\ldots)$ u. s. w. durch einfache Zeichen, etwa $t, u\ldots$, ihre Incremente $\alpha f(x, y, z\ldots)$, $\beta f_{(1)}(x, y, z\ldots)\ldots$, so wie die Incremente von $x, y, z\ldots$ durch $\delta t, \delta u\ldots \delta x, \delta y, \delta z\ldots$ dargestellt, und diese die *Variationen* von jenen genannt werden.

§. 3.

Ist demnach $V = F[x, y, z\ldots t, u\ldots]$, wo $x, y, z\ldots$ als absolut-, $t, u\ldots$ hingegen als relativ-unabhängig betrachtet werden, gegeben: so ist es einleuchtend, dass die Veränderung von $x, y, z\ldots$ in $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z\ldots$, wie auch die von $t, u\ldots$ in $t+\delta t$, $u+\delta u\ldots$, jede dieser beiden Gattungen von Grössen für sich betrachtet, sowohl einzeln, als gleichzeitig statt finden können; auch ist es klar, dass die

Incremente der relativ-unabhängigen Grösseu auf die Aenderung der absolut-unabhängigen keinen Einfluss äussern werden. Anders verhält es sich inzwischen hinsichtlich der Incremente dieser letztern selbst. Da nehmlich $t, u \ldots \delta t, \delta u \ldots$ als Funktionen von $x, y, z \ldots$ gedacht werden, so werden ihre Werthe sich offenbar mit den Werthen dieser Grössen selbst ändern. Dieser Unterschied zwischen dem gegenseitigen Einfluss der Aenderungen der absolut- und relativ-unabhängigen Grössen ist für die klare Einsicht in die Natur des Gegenstandes nicht ohne Erheblichkeit, und erzeugt für die folgenden Betrachtungen eine Trennung, auf welche wir öfters werden zurück kommen müssen.

§. 4.

Es sei, um der Sache näher zu treten, $V = F[x, y, z \ldots t, u \ldots]$, wo, wie vorhin, $x, y, z \ldots$ als absolut-, $t, u \ldots$ hingegen als relativ-unabhängig angesehen werden. Anstatt $t, u \ldots$, als Funktionen von $x, y, z \ldots$, denke man sich die Formen $t + k\delta t$, $u + k\delta u \ldots$, und anstatt $x, y, z \ldots$ die Grössen $x + k\delta x$, $y + k\delta y$, $z + k\delta z \ldots$ gesetzt, wo k eine beliebige constante Zahl, δt, $\delta u \ldots$ beliebige, von einander unabhängige Funktionen von $x, y, z \ldots$ und δx, δy, $\delta z \ldots$ beliebige Funktionen, erstere von x, die zweite von y, die dritte von $z \ldots$ repräsentiren; ferner denke man sich den, diesen Grössen correspondirenden Werth von V mit $V_{(1)}$ bezeichnet, und die Grösse $V_{(1)} - V$ nach steigenden Potenzen von k entwickelt. Da für $k = o$, $V_{(1)} = V$ wird, so sieht man leicht, dass das Resultat folgende Form haben wird:

$$V_{(1)} - V = C_1 k + C_2 k^2 + C_3 k^3 + C_4 k^4 \ldots + C_n k^n \ldots$$

Weil nun für $k = 1$ die Incremente $k\delta t$, $k\delta u \ldots k\delta x$, $k\delta y$, $k\delta z \ldots$

in die Variationen von $x, y, z \ldots t, u \ldots$ übergehen (§. 2.), und die Reihe sich in

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \ldots + C_n \ldots$$

verwandelt: so wollen wir

1. C_1 die Variation der ersten Ordnung von V nennen, und mit δV bezeichnen; $1.2\, C_2$ soll die Variation der zweiten Ordnung von V heissen, und mit $\delta^2 V$ bezeichnet werden; allgemein soll $1.2.3 \ldots n. C_n$ die Variation der n^{ten} Ordnung von V genannt, und durch $\delta^n V$ angedeutet werden. Hiernach erhalten wir als Definition

$$V_{(1)} - V = k \delta V + \frac{k^2}{1.2} \delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3} \delta^3 V + \frac{k^4}{1.2.3.4.} \delta^4 V \ldots + \frac{k^n}{1.2.3 \ldots n} \delta^n V \ldots,$$

oder

$$V_{(1)} = V + k \delta V + \frac{k^2}{1.2} \delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3} \delta^3 V + \frac{k^4}{1.2.3.4.} \delta^4 V \ldots + \frac{k^n}{1.2\,3 \ldots n} \delta^n V \ldots,$$

Die Bestimmung der Variation irgend einer Ordnung einer vorgegebenen Grösse V, z. B. der n^{ten}, in welcher die Aufgabe der eigentlichen Variations-Rechnung besteht, kommt demnach auf die Bestimmung des Coefficienten von $\frac{k^n}{1.2.3 \ldots n}$ in der Entwickelung von $V_{(1)}$ nach steigenden Potenzen von k zurück, so fern man unter $V_{(1)}$ die Grösse versteht, in welche V übergeht, wenn man darin $x + k\delta x$, $y + yk\delta$, $z + k\delta z \ldots$ $t + k\delta t$, $u + kdu \ldots$ an die Stelle von $x, y, z \ldots$ $t, u \ldots$ setzt.

§. 5.

Um bei der Lösung der so eben ausgesprochenen Aufgabe von dem Einfachern zu dem Zusammengesetztern fortzuschreiten, wollen wir mit dem Falle anheben, wo V, die abhängige Grösse, als eine algebraische oder transcendente Funktion von x, als absolut-, und y, als relativ-unabhängig betrachtet, gegeben ist, und die Variation der

n^{ten} Ordnung in so fern bestimmt werden soll, als diese von der Variation der relativ-unabhängigen Grösse y abhängig ist.

Es sei daher $V = F(x, y)$, folglich, indem man $y + k\delta y$ anstatt y setzt,

$$V_{(1)} = F(x, y + k\delta y).$$

Setzt man nun

$$V_{(1)} = V + C_1 k + C_2 k^2 + C_3 k^3 \ldots + C_n k^n + C_{n+1} k^{n+1} \ldots;$$

so hat man offenbar

$$\left(\frac{dV_{(1)}}{dk}\right) = C_1 + 2C_2 k + 3C_3 k^2 \ldots + nC_n k^{n-1} + (n+1).C_{n+1} k^n \ldots;$$

$$\left(\frac{d^2V_{(1)}}{dk^2}\right) = 1.2\,C_2 + 2.3.C_3 k \ldots + (n-1).n.C_n k^{n-2} + n.(n+1)\,C_{n+1} k^{n-1} \ldots;$$

$$\left(\frac{d^3V_{(1)}}{dk^3}\right) = 1.2.3.C_3 \ldots + (n-2)(n-1)nC_n k^{n-3} + (n-1)n(n+1)C_{n+1} k^{n-2} \ldots;$$

allgemein:

$$\left(\frac{d^nV_{(1)}}{dk^n}\right) = 1.2.3.4\ldots n\,C_n + 2.3.4\ldots(n+1)\,C_{n+1}\,k \ldots$$

Macht man hierin $k = o$, so erlangt man

$$\left(\frac{dV_{(1)}}{dk}\right) = C_1;\ \frac{\left(\frac{d^2V_{(1)}}{dk^2}\right)}{1.2.} = C_2;\ \frac{\left(\frac{d^3V_{(1)}}{dk^3}\right)}{1.2.3.} = C_3; \ldots \text{ allgemein } \frac{\left(\frac{d^nV_{(1)}}{dk^n}\right)}{1.2.3\ldots n} = C_n, \quad (I)$$

ſo fern, nach geschehener Differenziation, k gleich Null gesetzt wird.

Nun ist,*) indem man y und k zugleich als veränderlich betrachtet,

$$dV_{(1)} = \left(\frac{dV_{(1)}}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV_{(1)}}{dk}\right) dk.$$

Setzt man aber $y + k\delta y = y_{(1)}$, wodurch $dy + dk\delta y = d_{(1)}y$, und $V_{(1)} = F(x, y_{(1)})$ wird: so ist, unter derselben Voraussetzung,

$$dV_{(1)} = \left(\frac{dV_{(1)}}{dy^{(1)}}\right) dy^{(1)} = \left(\frac{dV_{(1)}}{dy_{(1)}}\right) dy + \left(\frac{dV_{(1)}}{dy_{(1)}}\right) \delta y\, dk.$$

*) $V_{(1)}$ als Funktion dreier von einander unabhängigen Grössen $y, k, \delta y$ ansehend.

Man hat also die identische Gleichung

$$\left(\frac{dV_{(1)}}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV_{(1)}}{dk}\right) dk = \left(\frac{dV_{(1)}}{dy_{(1)}}\right) dy + \left(\frac{dV_{(1)}}{dy_{(1)}}\right) \delta y\, dk;$$

folglich

$$\left(\frac{dV_{(1)}}{dy}\right) = \left(\frac{dV_{(1)}}{dy_{(1)}}\right),$$

und

$$\left(\frac{dV_{(1)}}{dk}\right) = \left(\frac{dV_{(1)}}{dy_{(1)}}\right) \delta y,$$

aus deren Verbindung wiederum

$$\left(\frac{dV_{(1)}}{dk}\right) = \left(\frac{dV_{(1)}}{dy}\right) \delta y$$

folgt. Setzt man daher

$$\left(\frac{dV_{(1)}}{dy}\right) = V'_{(1)}, \text{ so ist } \left(\frac{dV_{(1)}}{dk}\right) = V'_{(1)} \delta y;$$

$$\text{mithin } \left(\frac{d^2 V_{(1)}}{dy^2}\right) = \left(\frac{dV'_{(1)}}{dy}\right), \text{ und } \left(\frac{d^2 V_{(1)}}{dk^2}\right) = \left(\frac{dV'_{(1)}}{dk}\right) \delta y$$

Da aber $V'_{(1)} = F'(x, y + k\delta y)$ ist, so ist, in Folge des so eben Erwiesenen,

$$\left(\frac{dV'_{(1)}}{dk}\right) = \left(\frac{dV'_{(1)}}{dy}\right) \delta y;$$

folglich, indem man diese Gleichung mit den zwei letzten der vorhergehenden verbindet,

$$\left(\frac{d^2 V_{(1)}}{dk^2}\right) = \left(\frac{dV'_{(1)}}{dy}\right) \delta y^2 = \left(\frac{d^2 V_{(1)}}{dy^2}\right) \delta y^2.$$

Auf diesem Wege fortschreitend erlangt man

$$\left(\frac{d^n V_{(1)}}{dk^n}\right) = \left(\frac{d^n V_{(1)}}{dy^n}\right) \delta y^n, \quad (II)$$

und aus der Verbindung dieser Gleichung mit (*I*)

$$C_n = \frac{\left(\frac{d^n V_{(1)}}{dy^n}\right) \delta y^n}{1.\ 2.\ 3 \ldots n},$$

so fern man nach der Differenziation $k = o$ setzt.

Da nun offenbar $\left(\frac{d^n V}{dy^n}\right)$, für $k=o$, gleich $\left(\frac{d^n V}{dy^n}\right)$, und nach §. 4. $1.2.3\ldots n\ C_n = \delta^n V$ ist; so hat man

$$\delta^n V = \left(\frac{d^n V}{dy^n}\right) \delta y^n .$$

§. 6.

Es sei $V = F(x, y, z)$, wo x als absolut-, y, z hingegen als relativ-unabhängig betrachtet werden. Lässt man y in $y + k\delta y$, und z in $z + k\delta z$ übergehen, so erlangt man, indem man den correspondirenden Werth von V mit $V_{(1)}$ bezeichnet,

$$V_{(1)} = F(x, y + k\delta y, z + k\delta z)$$

Um diese Grösse nach Potenzen von k zu entwickeln, wollen wir die Grösse $W_{(1)} = F(x, y + k\delta y, z + h\delta z)$ betrachten, welche in $V_{(1)}$ übergeht, wenn man $h = k$ setzt, und uns diese nach Potenzen und Produkten von k und h entwickelt vorstellen. Da für $k=o$, $h=o$, $W_{(1)}$ gleich V ist, so wird man haben

$$\begin{array}{llllll}
W^{(1)} = V + k P_{1,0} & + k^2 P_{2,0} & + k^3 P_{3,0} & + \ldots & k^n P_{n,0} & + \ldots \\
\quad + h P_{0,1} & + kh P_{1,1} & + k^2 h P_{2,1} & + \ldots & k^{n-1} h P_{n-1,1} & + \ldots \\
 & + h^2 P_{0,2} & + k h^2 P_{1,2} & + \ldots & k^{n-2} h^2 P_{n-2,2} & + \ldots \\
 & & + h^3 P_{0,3} & + \ldots & k^{n-3} h^3 P_{n-3,3} & + \ldots \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & & k^{n-r} h^r P_{n-r,r} & + \ldots \\
 & & & & \vdots & \\
 & & & & h^n P_{0,n} & + \ldots
\end{array}$$

Durch wirkliche Differenziation überzeugt man sich sehr leicht, dass

$$P_{n-r,r} = \frac{\left(\frac{d^n W_{(1)}}{dk^{n-r}\, dh^r}\right)}{1.2.3\ldots(n-r).1.2.3\ldots r}$$

ist, wenn man nach der Differenziation $k=o$, $h=o$ setzt.

Allein, da $\left(\frac{d^n W_{(1)}}{dk^{n-r}dh^r}\right) = \left\{\frac{d^{n-r}\left(\frac{d^r W_{(1)}}{dh^r}\right)}{dk^{n-r}}\right\} = \left\{\frac{d^r\left(\frac{d^{n-r} W_{(1)}}{dk^{n-r}}\right)}{dh^r}\right\}$,

und nach der Gleichung (*II*) des vorigen §'s,

$\left(\frac{d^r W_{(1)}}{dh^r}\right) = \left(\frac{d^r W_{(1)}}{dz^r}\right)\delta z^r$, und $\left\{\frac{d^{n-r}\left(\frac{d^r W_{(1)}}{dh^r}\right)}{dk^{n-r}}\right\} = \left\{\frac{d^{n-r}\left(\frac{d^r W_{(1)}}{dh^r}\right)}{dy^{n-r}}\right\}\delta y^{n-r}$

ist; so ist

$$P_{n-r,\,r} = \frac{\left(\frac{d^n W_{(1)}}{dy^{n-r}dz^r}\right)\delta y^{n-r}\delta z^r}{1.2.3\ldots(n-r).1.2.3\ldots r},$$

so fern man nach der Differenziation $h=o$ und $k=o$ setzt.

Setzt man nun in obiger Gleichung $h=k$, wodurch $W_{(1)}$ in $V_{(1)}$ übergeht, so erlangt man die Form

$$V_{(1)} = V + kC_1 + k^2 C_2 + k^3 C_3 + \ldots . k^n C_n + \ldots . ,$$

wo C_n dem Inbegriff aller $P_{n-r,r}$, von $r=o$ bis $r=n$ eingeschlossen, gleich ist. Bezeichnet man daher diesen Inbegriff mit $\underset{o \ldots n}{\overset{r}{S}} P_{n-r,r}$, so erlangt man

$$C_n = \underset{o \ldots n}{\overset{r}{S}} \frac{\left(\frac{d^n V_{(1)}}{dy^{n-r}dz^r}\right)\delta y^{n-r}\delta z^r}{1.2.3\ldots(n-r).1.2.3\ldots r},$$

wenn man nach der Differenziation $h=o$, $k=o$ setzt. Überlegt man nun, dass unter dieser Bedingung $\left(\frac{d^n V_{(1)}}{dy^{n-r}dz^r}\right) = \left(\frac{d^n V}{dy^{n-r}dz^r}\right)$ ist, so

$$C_n = \underset{o \ldots n}{\overset{r}{S}} \frac{\left(\frac{d^n V}{dy^{n-r}dz^r}\right)\delta y^{n-r}\delta z^r}{1.2.3\ldots(n-r).1.2.3\ldots r};$$

oder, wenn man, der Symmetrie wegen, $n-r=r'$ setzt,

$$C_n = \overset{\frac{r+r'}{n}}{S} \frac{\left(\frac{d^{r+r'} V}{dy^r \, dz^{r'}}\right) \delta y^r \, \delta z^{r'}}{1.2.3\ldots r \;\; 1.2.3\ldots r'};$$

wo unter der, sich unter dem Zeichen S befindlichen Gröſse der Inbegriff aller Formen von $r+r'$ zur Summe n verstanden, und der Zahlen-Divisor $= 1.2.3\ldots n$ wird, wenn eine von den Grössen r, r' gleich Null ist. Da nun, der Definition gemäss, $\delta^n V = 1.2.3\ldots n, C_n$ ist, so hat man

$$\delta^n V = 1.2.3\ldots n \times \overset{\frac{r+r'}{n}}{S} \frac{\left(\frac{d^{r+r'} V}{dy^r \, dz^{r'}}\right) \delta y^r \delta z^{r'}.}{1.2.3\ldots r . 1.2.3\ldots r'}$$

§. 7.

Es sey ganz allgemein $V = F(x, y, z, t, u\ldots)$, wo x als absolut-, $y, z, t, u\ldots$, hingegen als relativ-unabhängig angesehen werden. Substituirt man $y + k\delta y$, $z + k\delta z$, $t + k\delta t$, $u + k\delta u\ldots$ anstatt $y, z, t, u\ldots$, und bezeichnet den entsprechenden Werth von V mit $V_{(1)}$, so hat man

$$V_{(1)} = F\{x, y + k\delta y, z + k\delta z, t + k\delta t, u + k\delta u\ldots\}.$$

Um die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von k in der Entwickelung

$$V_{(1)} = V + kC_1 + k^2 C_2 + k^3 C_3 + \ldots k^n C^n + \ldots]$$

zu bestimmen, wollen wir die Grösse

$$W_{(1)} = F\{x, y + k\delta y, z + h\delta z, t + g\delta t, u + f\delta u, \ldots\}$$

betrachten, die in $V_{(1)}$ übergeht, wenn man $h = g = f\ldots = k$ macht. Denkt man sich diese Grösse nach Potenzen und Producten von $k, h, g, f\ldots$ entwickelt, so wird man, da für $k = o, h = o, g = o, f = o\ldots$ $W_{(1)}$ in V übergeht, folgende Form haben:

$$\begin{aligned} W_{(1)} = V &+ k\,P_{1,0,0,0\ldots} + k^2\,P_{2,0,0,0\ldots} + \ldots \\ &+ h\,P_{0,1,0,0\ldots} + kh\,P_{1,1,0,0\ldots} + \ldots \\ &+ g\,P_{0,0,1,0\ldots} + h^2\,P_{0,2,0,0,\ldots} + \ldots \\ &+ f\,P_{0,0,0,1\ldots} + kg\,P_{1,0,1,0\ldots} + \ldots \\ &\qquad\qquad\quad + g^2\,P_{0,0,2,0\ldots} + \ldots \\ &\qquad\qquad\quad + kf\,P_{1,0,0,1\ldots} + \ldots \\ &\qquad\qquad\quad + f^2\,P_{0,0,0,2\ldots} + \ldots \\ &\qquad\qquad\quad + hg\,P_{0,1,1,0\ldots} + \ldots \\ &\qquad\qquad\quad + hf\,P_{0,1,0,1\ldots} + \ldots \\ &\qquad\qquad\quad + gf\,P_{0,0,1,1\ldots} + \ldots \end{aligned}$$

deren allgemeines Glied offenbar durch die Form

$$k^{r}\,h^{r'}\,g^{r''}\,f^{r'''}\cdots \times P_{r,r',r'',r''',\ldots}$$

dargestellt werden kann. Auch hat es, nach dem Vorhergehenden, keine Schwierigkeit, einzusehen, dass

$$P_{r,r',r'',r''',\ldots} = \frac{\left\{\dfrac{d^{r+r'+r''+r'''\ldots}\,W_{(1)}}{dk^{r}\,dh^{r'}\,dg^{r''}\,df^{r'''}}\right\}}{1.2.3\ldots r.\,1.2.3\ldots r'.\,1.2.3\ldots r''.\,1.2.3\ldots r'''\ldots}$$

ist, so fern man darin nach geschehener Differenziation $k, h, g, f, \ldots$ gleich Null macht. Ferner ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$\left\{\frac{d^{r+r'+r''+r'''\ldots}\,W_{(1)}}{dk^{r}\,dh^{r'}\,dg^{r''}\,df^{r'''}\cdots}\right\} = \left\{\frac{d^{r+r'+r''+r'''\ldots}\,W_{(1)}}{dy^{r}\,dz^{r'}\,dt^{r''}\,du^{r'''}\cdots}\right\}\delta y^{r}\,\delta z^{r'}\,\delta t^{r''}\,\delta u^{r'''}\ldots$$

und, für den Fall der so eben bezeichneten Werthe von $k, h, g, f\ldots$,

$$\left\{\frac{d^{r+r'+r''+r'''\ldots}\,W_{(1)}}{dy^{r}\,dz^{r'}\,dt^{r''}\,du^{r'''}\cdots}\right\} = \left\{\frac{d^{r+r'+r''+r'''\ldots}\,V}{dy^{r}\,dz^{r'}\,dt^{r''}\,du^{r'''}\cdots}\right\};$$

folglich $$P_{r,r',r'',r''',\ldots} = \frac{\left\{\dfrac{d^{r+r'+r''+r'''\ldots}\,V}{dy^{r}\,dz^{r'}\,dt^{r''}\,du^{r'''}\cdots}\right\}\delta y^{r}\,\delta z^{r'}\,\delta t^{r''}\,\delta u^{r'''}\ldots}{1.2.3\ldots r.\;1.2.3\ldots r'.\;1.2.3\ldots r''.\;1.2.3\ldots r'''.\ldots}$$

Setzt man nun in der Entwickelung von $W_{(1)}$ $h = g = f \ldots = k$, wodurch $W_{(1)}$ in

$$V_{(1)} = V + kC_1 + k^2 C_2 + k^3 C_3 + \ldots k^n C_n + \ldots$$

übergeht, und

$$C_n = \overset{\frac{r+r'+r''+r'''\ldots}{n}}{S} P_{r, r', r'', r''' \ldots}$$

ist; so erlangt man

$$\delta^n V = 1.2.3\ldots n \times \overset{\frac{r+r'+r''+r'''\ldots}{n}}{S} \frac{\left\{\frac{d^{r+r'+r''+r'''}V}{dy^r\, dz^{r'}\, dt^{r''}\, du^{r'''}}\right\} \delta y^r\, \delta z^{r'}\, \delta t^{r''}\, \delta u^{r'''} \ldots}{1.2.3\ldots r.\ 1.2.3\ldots r'.\ 1.2.3\ldots r''.\ 1.2.3\ldots r'''\ldots},$$

wo der Zahlen-Divisor einer, der des vorigen §'s ähnlichen Bemerkung unterworfen ist.

Man wird sich leicht überzeugen, daſs, so fern man bloss die Variationen der relativ-unabhängigen Grössen berücksichtigt, dieses Resultat von der Anzahl der zu Grunde liegenden absolut-unabhängigen Grössen gänzlich unabhängig, und daher allgemein gültig ist; nachdem der Unterschied, den eine vermehrte Anzahl absolut-unabhängiger Grössen, unter dieser Voraussetzung, erzeugen kann, bloss die Bedeutung der Variationen $\delta y, \delta z, \delta t, \delta u \ldots$, betriſſt, die als Funktionen von diesen gedacht werden.

§. 8.

Es darf hier aus der Differenzial-Rechnung als bekannt vorausgesetzt werden, dass, wenn man in $V = F(x, y, z, t, u \ldots)$ x als constant, und $y, z, t, u \ldots$ als veränderliche, von einander unabhängige Grössen betrachtet, alsdann

$$d^n V = 1.2.3\ldots n \times \overset{\frac{r+r'+r''+r'''\ldots}{n}}{S} \frac{\left\{\frac{d^{r+r'+r''+r'''}V}{dy^r\, dz^{r'}\, dt^{r''}\, du^{r'''}\ldots}\right\} dy^r\, dz^{r'}\, dt^{r''}\, du^{r'''} \ldots}{1.2.3\ldots r.\ 1.2.3\ldots r'.\ 1.2.3\ldots r''.\ 1.2.3\ldots r'''.}$$

ist. Vergleicht man mit diesem Ausdrucke den für $\delta^n V$ oben gefundenen, so sieht man, dass sich letzterer aus ersterm dadurch ableiten

lässt, dass man die Variationen an die Stelle der Differenzialien, oder kürzer, δ an die Stelle von d setzt.

Das Resultat, zu welchem wir durch die bisherigen Beetrachtungen gelangt sind, ist also folgendes: Ist V irgend eine algebraische oder transcendente Funktion von $x, y, z, t, u \ldots$, von denen einige als absolut-, die übrigen aber als relativ-unabhängig angesehen werden: so erhält man die Variation der n^{ten} Ordnung dieser Grösse, so fern dieselbe aus den Variationen der relativ-unabhängigen Grössen entspringt, und die Variationen der absolut-unabhängigen Grössen unberücksichtigt bleiben, wenn man von V, als eine Funktion eben so vieler von einander unabhängigen Grössen betrachtet, das vollständige Differenzial der n^{ten} Ordnung entwickelt, und darin δ an die Stelle von d setzt.

Endlich, da $\delta^n V = d^n V$ ist, so fern man δ an die Stelle von d setzt; so ist auch, unter gleicher Voraussetzung, $\delta^{m+n} V = d^{m+n} V$, $\delta^m(\delta^n V) = d^m(\delta^n V)$ und $d^m(\delta^n V) = d^m(d^n V)$; mithin, unter derselben Bedingung, $\delta^m(\delta^n V) = d^{m+n} V$, und daher $\delta^m(\delta^n V) = \delta^{m+n} V$.

§. 9.

Die Einfachheit der hinsichtlich der Bestimmung von $\delta^n V$ so eben ausgesprochenen Regel rührt bloss von dem Umstande her, dass die relativ-unabhängigen Grössen, in ihren Veränderungen, als vollkommen unabhängig von einander angesehen werden. Dieselbe hört auf, so bald man auch den Einfluss der Variationen der absolut-unabhängigen Grössen zu berücksichtigen wünscht, indem diese zugleich Veränderungen in den relativ-unabhängigen Grössen und deren Variationen erzeugen. Um dieses mit der gehörigen Klarheit einzusehen, braucht man nur zu überlegen, dass hier, für $V = F(x, y, z, t, u \ldots)$, wo x als absolut-, $y, z, t, u \ldots$ aber als relativ-unabhängig angesehen werden, von zwei verschiedenen Zuständen des Werthes von V die

Rede ist, vön denen der eine durch V, der andere aber durch $V_{(1)}$ repräsentirt wird. Bei dem ersten liegen für $y, z, t, u \ldots$ die Formen $y, z, t, u \ldots$ und für x der Werth x; bei dem letzten hingegen für $y, z, t, u \ldots$ die Formen $y + k\delta y$, $z + k\delta z$, $t + k\delta t$, $u + k\delta u \ldots$ und für x der Werth $x + k\delta x$ zu Grunde. Um den ersten Werth von V aus dem obigen allgemeinen Schema abzuleiten, wird man darin anstatt der unbestimmten Zeichen $y, z, t, u \ldots$ die als bestimmt gedachte Formen $y, z, t, u \ldots$, und für das unbestimmte x das als bestimmt betrachtete x setzen können. Eben so wird man, was den Werth von $V_{(1)}$ betrifft, erst anstatt $y, z, t, u \ldots$ die bestimmten Formen $y + k\delta y$, $z + k\delta z$, $t + k\delta t$, $u + \delta u \ldots$ und alsdann anstatt des unbestimmten x das bestimmte $x + k\delta x$ substituiren können.

Diese Betrachtung bezeichnet zugleich das Verfahren, welches man wird anwenden könneu, um mit Berücksichtigung der Variationen der absolut-unabhängigen Grössen zu der Variation irgend einer Ordnung von V zu gelangen. Es sei $V = F(x, y, z, t, u \ldots)$, wo bloss x als absolut-unabhängig angesehen wird, und

$$F\{x, y + k\delta y, z + k\delta z, t + k\delta t, u + k\delta u \ldots\} = V + k\delta_1 V + \frac{k^2}{1.2.} \delta_1^2 V + \frac{k^3}{1.2\,3} \delta_1^3 V + \ldots \frac{k^n}{1.2.3 \ldots n} \delta_1^n V + \ldots$$

Substituirt man hierin $x + k\delta x$ anstatt x, so verwandelt sich

$$V \text{ in } V + k\frac{dV}{dx}\delta x + \frac{k^2}{1.2.}\frac{d^2V}{dx^2}\delta x^2 + \frac{k^3}{1.2.3.}\frac{d^3V}{dx^3}\delta x^3 + \ldots \frac{k^n}{1.2.3 \ldots n}\frac{d^nV}{dx^n}\delta x^n + \ldots$$

$$k\delta_1 V \text{ in} \ldots k\delta_1 V + k^2 \frac{d\delta_1 V}{dx}\delta x + \frac{k^3}{1.2}\frac{d^2\delta_1 V}{dx^2}\delta x^2 + \ldots \frac{k^n}{1.2.3 \ldots (n-1)}\frac{d^{n-1}\delta_1 V}{dx^{n-1}}\delta x^{n-1} + \ldots$$

$$\frac{k^2\delta_1^2 V}{1.2} \text{ in} \ldots \quad \frac{k^2}{1\,2}\delta_1^2 V + \frac{k^3}{1.2.1}\frac{d\delta_1^2 V}{dx}\delta x + \ldots \frac{k^n}{1.2.1.2.3 \ldots (n-2)}\frac{d^{n-2}\delta_1^2 V}{dx^{n-2}}\delta x^{n-2} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$\frac{k^n}{1.2.3 \ldots n}\delta_1^n V \text{ in} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \frac{k^n}{1.2.3 \ldots n}\delta_1^n V \qquad + \ldots$$

Ordnet man also das Resultat nach Potenzen von k und vergleicht selbiges mit

$$V_{(1)} = V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots \frac{k^n}{1.2.3\ldots n}\delta^n V + \ldots$$

so erlangt man

$$\delta^n V = \overset{r}{\underset{0\ldots n}{S}} \frac{(r+1).(r+2)(r+3)\ldots n}{1.\ 2.\ 3\ldots(n\text{-}r)} \frac{d^{n-r}\ \delta^r_1 V}{dx^{n-r}} dx^{n-r}.$$

§. 10.

Werden aber in $V = F(x, y, z, t, u\ldots)$ x und y zugleich als absolut- $z, t, u\ldots$ hingegen als relativ-unabhängig angesehen; so wird man, indem man

$$F\{x, y, z+k\delta z, t+k\delta t, u+k\delta u\ldots\} = V + k\delta_1 V + \frac{k^2\delta^2_1 V}{1.2} + \frac{k^3\delta^3_1 V}{1.2\,3} + \ldots \frac{k^n\delta^n_1 V}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

setzt, hierin anstatt x und y allenthalben $x+k\delta x$, $y+k\delta y$ zu substituiren, und das Resultat nach Potenzen von k zu entwickeln haben. Unter dieser Voraussetzung verändert sich nach §. 6.

V in

$$V + k \overset{r+r'}{\underset{1}{S}} \frac{\frac{d^{r+r'}V}{dx^r\,dy^{r'}}\delta x^r \delta y^{r'}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'} + k^2 \overset{r+r'}{\underset{2}{S}} \frac{\frac{d^{r+r'}V}{dx^r\,dy^{r'}}\delta x^r \delta y^{r'}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'} + \ldots k^n \overset{r+r'}{\underset{n}{S}} \frac{\frac{d^{r+r'}V}{dx^r\,dy^{r'}}\delta x^r \delta y^{r'}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'}$$

$k\delta_1 V$ in

$$k\ \delta_1 V \quad \ldots \quad + \frac{k^2}{1} \overset{r+r'}{\underset{1}{S}} \frac{\frac{d^{r+r'}\delta_1 V}{dx^r\,dy^{r'}}\delta x^r \delta y^{r'}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'} + \ldots \frac{k^n}{1} \overset{r+r'}{\underset{n-1}{S}} \frac{\frac{d^{r+r'}V}{dx^r\,dy^{r'}}\delta x^r \delta y^{r'}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'}$$

$\frac{k^2}{1.2}\delta^2_1 V$ in

$$\frac{k^2}{1.2}\delta^2_1 V \quad \ldots \quad + \ldots \frac{k^n}{1.2} \overset{r+r'}{\underset{n-2}{S}} \frac{\frac{d^{r+r'}V}{dx^r\,dy^{r'}}\delta x^r \delta y^{r'}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'}$$

u. s. w. u. s. w.

Ordnet man daher das Resultat nach Potenzen von k und vergleicht solches mit

$$V_{(1)} = V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\,\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\,\delta^3 V + \ldots \frac{k^n}{1.2.3\ldots n}\,\delta^n V + \ldots$$

so erlangt man

$$\delta^n V = 1.2.3\ldots n \times \left\{ \begin{array}{l} \underset{r+r'=n}{S} \dfrac{\dfrac{d^{r+r'}V}{dx^r\, dy^{r'}}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'}\,\delta x^r\, \delta y^{r'} \\[2ex] + \underset{r+r'=n-1}{S} \dfrac{\dfrac{d^{r+r'}\delta_1 V}{dx^r\, dy^{r'}}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'}\,\delta x^r \delta x^{r'} \\[2ex] + \dfrac{1}{1.2} \underset{r+r'=n-2}{S} \dfrac{\dfrac{d^{r+r'}\delta_1^2 V}{dx^r\, dy^{r'}}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'}\,\delta x^r\, \delta y^{r'} \\[2ex] + \dfrac{1}{1.2.3} \underset{r+r'=n-3}{S} \dfrac{\dfrac{d^{r+r'}\delta_1^3 V}{dx^r\, dy^{r'}}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'}\,\delta x^r \delta y^{r'} \\ \quad \vdots \\ + \dfrac{1}{1.2.3\ldots\rho} \underset{r+r'=n-\rho}{S} \dfrac{\dfrac{d^{r+r'}\delta_1^\rho V}{dx^r\, dy^{r'}}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r'}\,\delta x^r \delta y^{r'} \\ \quad \vdots \\ + \dfrac{1}{1.2\ldots n}\,\delta_1^n V. \end{array} \right.$$

Im Allgemeinen geht hieraus hervor, wie zu verfahren seyn wird, wenn in dem für V gegebenen Ausdruck, ausser x und y, noch mehrere absolut-unabhängige Grössen verhanden sind, und wie die Ver-

wickelung des Endresultates zunimmt, je nachdem die Anzahl dieser Grössen sich vermehrt.

§. 11.

Ist V, als Funktion von $x, y, z, t \ldots$ nicht unmittelbar, sondern durch eine Gleichung gegeben, so lassen sich daraus, vermittelst des Vorhergehenden, ähnliche Relationen für die Variationen der verschiedenen Ordnungen von V mit Leichtigkeit ableiten.

Es sei die gegebene Gleichung $F[V, x, y, z, t \ldots] = o$, welche wir, der Kürze halber, durch $W = o$ darstellen wollen, und wo, um die Begriffe zu fixiren, x als absolut-, $y, z, t \ldots$ als relativ-unabhängig, V als abhängig, und W als eine algebraische oder transcendente Funktion von diesen Grössen betrachtet werden soll. Da V, als Funktion von $y, z, t \ldots$, durch die Substitution von $y + k\delta y, z + k\delta z, t + k\delta t \ldots$ an die Stelle von $y, z, t \ldots$ nach §. 4. übergeht in

$$V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2.}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots;$$

so hat man

$$F\left\{V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2.}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots, x, y + k\delta y, z + k\delta z, t + k\delta t \ldots\right\} = o,$$

unabhängig von $k, \delta y, \delta z, \delta t \ldots$

Entwickelt man daher den Ausdruck auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nach Potenzen von k, so erhält man die Form

$$W + C_1 k + C_2 k^2 + C_3 k^3 + \ldots = o;$$

mithin

$$W = o, C_1 = o, C_2 = o, C_3 = o, \text{ u. s. w.}$$

Die erste dieser Gleichungen ist nichts anders, als die vorgegebene selbst, und die zweite enthält, indem C_1 von δV abgängig ist, eine Relation für δV. Da nun $C_1 = \delta W$ ist, so fern V als eine rela-

tiv-unabhängige Grösse betrachtet wird: so hat man, unter eben dieser Voraussetzung,

$$\delta W = o$$

als Gleichung für die Variation der ersten Ordnung von V.

Substituirt man ferner in δW anstatt $y, z, t \ldots$ die Formen $y + k\delta y$, $z + k\delta z$, $t + k\delta t \ldots$ und überlegt, dass zugleich

$$V \text{ in } V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2.}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots \quad (\S.\ 4),$$

$$\text{und } \delta V \text{ in } \delta V + k\delta^2 V + \frac{k^2}{1.2}\delta^3 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^4 V + \ldots \quad (\S.\ 8)$$

übergeht; so erlangt man, indem man das Resultat nach Potenzen von k entwickelt, die Form

$$\delta W + C_1^{(1)} k + C_2^{(1)} k^2 + C_3^{(1)} k^3 + \ldots = o$$

unabhängig von k; folglich

$$W = o, \quad C_1^{(1)} = o, \quad C_2^{(1)} = o, \text{ u. s. w.}$$

Da nun $C_1^{(1)}$ die Grösse $\delta^2 V$ enthält und gleich $\delta\delta W = \delta^2 W$ ist (§. 8.), sofern man V und δV als relativ-unabhängige Grössen betrachtet, und zugleich die identische Gleichung $\delta\delta V = \delta^2 V$ berücksichtigt: so hat man, unter derselben Voraussetzung,

$$\delta^2 W = o$$

als Gleichung für die Variation der zweiten Ordnung von V.

Im Allgemeinen geht hieraus hervor, dass die Gleichungen für die Variationen der verschiedenen Ordnungen von V durch allmähliges Variiren der vorgegebenen aus einander abgeleitet werden können, indem man sowohl V, als deren Variationen als relativ-unabhängige Grössen betrachtet, und dabei die identische Gleichung $\delta^m \delta^n V = \delta^{m+n} V$ berücksichtigt.

Es leuchtet ein, dass die auf diese Weise für $\delta^n V$ unmittelbar

hervortretende Relation zugleich die Variationen aller niedrigern Ordnungen von V enthalten wird, welche also durch die vorhergehenden Variations-Gleichungen eliminirt werden müssen, so fern man $\delta^n V$ bloss durch $x, y, z, t \ldots \delta y, \delta z, \delta t \ldots$ ausgedrückt zu erhalten wünscht. Hat man nun auf diese Weise $\delta^n V$, so fern diese Grösse von den Variationen der relativ-unabhängigen Grössen dependirt, entwickelt; so wird man daraus solche mit Berücksichtigung der Variationen der absolut-unabhängigen Grössen nach den §. §. 9 und 10 ableiten können.

§. 12.

Bis hiezu betrachteten wir bloss algebraische oder transcendente Funktionen. Allein V könnte auch vermittelst Differenziation aus einem, solcher Gestalt gegebenen Ausdruck abgeleitet werden müssen.

Es sei

$$V = \frac{d^\varrho F(x, y, z, t \ldots)}{dx^\varrho} = \frac{d^\varrho W}{dx^\varrho},$$

wo x, als absolut-, $y, z, t \ldots$ aber als relativ-unabhängig angesehen werden. Abstrahirt man von der Variation von x, so ist

$$V_{(1)} = \frac{d^\varrho F(x, y + k\delta y, z + k\delta z, t + k\delta t \ldots}{dx^\varrho};$$

oder, indem man diesen Ausdruck nach Potenzen von k entwickelt,

$$V_{(1)} = \frac{d^\varrho W}{dx^\varrho} + k\frac{d^\varrho \delta W}{dx^\varrho} + \frac{k^2}{1.2}\frac{d^\varrho \delta^2 W}{dx^\varrho} + \frac{k^3}{1.2.3}\frac{d^\varrho \delta^3 W}{dx^\varrho} + \ldots \frac{k^n}{1.2 \ldots n}\frac{d^\varrho \delta^n W}{dx^\varrho} + \ldots$$

Da nun nach §. 4

$$V_{(1)} = V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots \frac{k^n}{1.2.3 \ldots n}\delta^n V \ldots$$

ist: so hat man

$$\delta^n V = \frac{d^{\varrho}\, \delta^n W}{dx^{\varrho}},$$

wo $\delta^n W$ nach §. 8 bekannt ist.

§. 13.

Das Resultat bleibt dem vorigen vollkommen analog, wie viele absolut-unabhängige Grössen auch in W zu Grunde liegen. Es sei, um dieses näher zu zeigen,

$$W = F(x, y, z \ldots t, u \ldots),$$

wo $x, y, z \ldots$ als absolut-, $t, u \ldots$ aber als relativ-unabhängig angesehen werden, und

$$V = \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho''+\ldots} W}{dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots}.$$

Substituirt man hier $t + k\delta t$, $u + k\delta u \ldots$ an die Stelle von $t, u \ldots$, so erlangt man

$$W^{(1)} = F[x, y, z \ldots t + k\delta t, u + k\delta u \ldots],$$

und
$$V_{(1)} = \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho'' \ldots} W_{(1)}}{dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots};$$

oder, indem man diesen Ausdruck nach k entwickelt,

$$V^{(1)} = V + k \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho'' \ldots}\, \delta W}{dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots} + \frac{k^2}{1.2} \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho'' \ldots}\, \delta^2 W}{dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots} + \ldots \frac{k^n}{1.2.3 \ldots n} \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho'' \ldots}\, \delta^n W}{dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots} + \ldots$$

Nach §. 4. hat man daher

$$\delta^n V = \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho'' \ldots}\, \delta^n W}{dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots}$$

§. 14.

Man übersieht leicht, dass sich auf eine ganz ähnliche Weise, und in Folge der §. §. 8 und 13 ergiebt

$$\delta^m(\delta^n V) = \delta^m \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho''\dots}\,\delta^n W}{dx^\varrho\, dy^{\varrho'}\, dz^{\varrho''}\dots} = \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho''\dots}\,\delta^m\,(\delta^n W)}{dx^\varrho\, dy^{\varrho'}\, dz^{\varrho''}\dots}$$

$$= \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho''\dots}\,\delta^{m+n}\,W}{dx^\varrho\, dy^{\varrho'}\, dz^{\varrho''}\dots} = \delta^{m+n} V = \delta^{m+n} \frac{d^{\varrho+\varrho'+\varrho''\dots} W}{dx^\varrho\, dy^{\varrho'}\, dz^{\varrho''}\dots};$$

mithin

$$\delta^{m+n} \frac{d^{(\varrho+\mu)+(\varrho'+\mu')+(\varrho''+\mu'')\dots} W}{dx^{\varrho+\mu}\, dy^{\varrho'+\mu'}\, dz^{\varrho''+\mu''}\dots} = \delta^m \frac{d^{(\varrho+\mu)+(\varrho'+\mu')+(\varrho''+\mu'')\dots}\,\delta^n W}{dx^{\varrho+\mu}\, dy^{\varrho'+\mu'}\, dz^{\varrho''+\mu''}\dots}$$

$$= \frac{d^{(\varrho+\mu)+(\varrho'+\mu')+(\varrho''+\mu'')\dots}\,\delta^{m+n} W}{dx^{\varrho+\mu}\, dy^{\varrho'+\mu'}\, dz^{\varrho''+\mu''}\dots};$$

woraus ferner

$$\delta^{m+n} \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\dots} V}{dx^\mu\, dy^{\mu'}\, dz^{\mu''}\dots} = \delta^m \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\dots}\,\delta^n V}{dx^\mu\, dy^{\mu'}\, dz^{\mu''}\dots} = \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\dots}\,\delta^{m+n} V}{dx^\mu\, dy^{\mu'}\, dz^{\mu''}\dots}$$

folgt.

§. 15.

Die vorigen Resultate finden nur in so fern statt, als man von den Variationen der absolut-unabhängigen Grössen abstrahirt. Um aber auch diese zu berücksichtigen, verdient erwogen zu werden, dass alsdann von zwei verschiedenen Zuständen des Werthes von V, durch V und $V_{(1)}$ repräsentirt, die Rede ist. Bei dem ersten liegen für die relativ-unabhängigen Grössen die Formen $t, u\dots$ und für die absolut unabhängigen Grössen die Werthe $x, y, z\dots$ zu Grunde; während für den zweiten die Formen $t + k\delta t, u + k\delta u\dots$ und die Werthe $x + k\delta x,\ y + k\delta y,\ z + k\delta z\dots$ gelten. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir

$$V = \frac{d^\varrho F(x, y, z, t\dots)}{dx^\varrho}$$

nehmen, und darin x allein als absolut-, die übrigen Grössen aber

als relativ-unabhängig betrachten. Substituirt man hier $y+k\delta y$, $z+k\delta z$, $t+k\delta t\ldots$ an die Stelle von $y, z, t\ldots$ und $x+k\delta x=x_{(1)}$ an die Stelle von x; so erlangt man

$$V_{(1)}=\frac{d^{\varrho}F(x_{(1)}, y+k\delta y, z+k\delta z, t+k\delta t\ldots)}{dx^{\varrho}_{(1)}}.$$

Nun ist offenbar

$$\frac{d^{\varrho}F(x_{(1)}, y+k\delta y, z+k\delta z, t+k\delta t\ldots)}{dx^{\varrho}_{(1)}}=\frac{d^{\varrho}F(x, y+k\delta y, z+k\delta z, t+k\delta t\ldots)}{dx^{\varrho}},$$

so fern man in dem Ausdrucke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach geschehener Differenziation $x_{(1)}=x+k\delta x$ an die Stelle von x setzt. Bezeichnet man daher die Variationen der verschiedenen Ordnungen von V, so fern sie von den relativ-unabhängi- Grössen dependiren, mit δ_1; so hat man

$$\frac{d^{\varrho}F(x, y+k\delta y, z+k\delta z, t+k\delta t\ldots)}{dx^{\varrho}}=Vk\delta_1 V+\frac{k^2}{1.2}\delta_1^2 V+\frac{k^3}{1.2.3}\delta_1^3 V+\ldots\frac{k^n}{1.2.3.\ldots n}\delta_1^n V+\ldots$$

Setzt man nun hierin $x+k\delta x$ an die Stelle von x, entwickelt das Resultat nach Potenzen von k, und vergleicht solches mit

$$V_{(1)}=V+k\delta V+\frac{k^2}{1.2}\delta^2 V+\frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V+\ldots\frac{k^n}{1.2.3\ldots n}\delta^n V+\ldots;$$

so erlangt man nach §. 9.

$$\delta^n V=\overset{r}{\underset{0\ldots n}{S}}\frac{(r+1)}{1.}\frac{(r+2)}{2.}\frac{(r+3)\ldots n}{3.4\ldots(n-r)}\frac{d^{n-r}\,\delta_1^r V}{dx^{n-r}}dx^{n-r}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Resultate diesem vollkommen analog bleiben, wie viele absolut-unabhängige Grössen auch bei dem für V gegebenen Ausdruch zu Grunde liegen mögen; nur wird die Verwickelung derselben auf die in §. 10 näher bezeichnete Weise sich vermehren, je nachdem die Anzahl dieser Grössen zunimmt.

§. 16.

Die Grösse V könnte auch vermittelst Integration aus irgend einer algebraischen oder transcendenten Funktion von $x, y, z \ldots$ abgeleitet werden müssen. Es sei, um diesen Fall zu betrachten,

$$F(x, y, z, t \ldots) = W,$$

wo x als absolut-, $y, z, t \ldots$ aber als relativ-unabhängig angesehen werden sollen, und

$$V = \int^\varrho W \mathrm{d}x^\varrho,$$

wo $\int^\varrho$ andeutet, dass die unter diesem Zeichen befindliche Grösse ϱ mal hinter einander integrirt werden soll. Es ist sogleich klar, dass, da das Integral ϱ beliebige Constanten enthalten wird, für einen gewissen Werth von x, z. B. $x = a$, die Werthe von V, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}$, bis $\frac{\mathrm{d}^{\varrho-1} V}{\mathrm{d}x^{\varrho-1}}$ eingeschlossen, zugleich gegeben seyn müssen, wenn für bestimmte Formen von $y, z, t \ldots$, und einen bestimmten Werth von x, der Werth von V ebenfalls bestimmt seyn soll. Dieses vorausgesetzt, hat man, so fern man von der Variation der absolut-unabhängigen Grösse abstrahirt,

$$V_{(1)} = \int^\varrho W_{(1)} \mathrm{d}x^\varrho \text{, und } W_{(1)} = F(x, y + k\delta y, z + k\delta z, t + k\delta t \ldots);$$

folglich, indem man $W_{(1)}$ nach Potenzen von k entwickelt,

$$V_{(1)} = \int^\varrho W \mathrm{d}x^\varrho + k\int \quad W \mathrm{d}x^\varrho + \frac{k^2}{1.2}\int^\varrho \delta^2 W \mathrm{d}x^\varrho + \frac{k^3}{1.2.3}\int^\varrho \delta^3 W \mathrm{d}x_\varrho \ldots$$

$$\ldots + \frac{k^n}{1.2.3 \ldots n}\int^\varrho \delta^n W \mathrm{d}x^\varrho + \ldots,$$

und daher

$$\delta^n V = \int^\varrho \delta^n W \mathrm{d}x^\varrho.$$

so fern die ϱ Constanten den gegebenen Bedingungen gemäss bestimmt werden. In dieser Beziehung wollen wir annehmen, dass uns die Werthe von $V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \frac{d^3V}{dx^3} \ldots \frac{d^{\varrho-1}V}{dx^{\varrho-1}}$, für $x=a$ gegeben seien. Alsdann werden alle Werthe, deren diese Grössen nach Massgabe der Veränderungen von $y, z, t \ldots$ fähig sind, das Gemeinschaftliche haben, dass sie für $x=a$ einander gleich sind. Man hat daher ganz allgemein für $x=a$ und unabhängig von k,

$$\frac{d^\mu V_{(1)}}{dx^\mu} - \frac{d^\mu V}{dx^\mu} = o$$

mithin, da

$$\frac{d^\mu V_{(1)}}{dx^\mu} = \frac{d^\mu V}{dx^\mu} + k\frac{d^\mu \delta V}{dx^\mu} + \frac{k^2}{1.2}\frac{d^\mu \delta^2 V}{dx^\mu} + \ldots \frac{k^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^\mu \delta^n V}{dx^\mu} + \ldots$$

ist, ganz allgemein,

$$\frac{d^\mu \delta^n V}{dx^\mu} = o,$$

so fern man $x=a$ setzt.

§. 17.

Das obige Resultat ist allgemein gültig, wie viele absolut-unabhängige Grössen auch vorhanden seyn mögen.

Es sei, um dieses näher zu zeigen,

$$W = F(x, y, z \ldots t, u \ldots),$$

wo $x, y, z \ldots$ als absolut-, $t, u \ldots$ hingegen als relativ-unabhängig betrachtet werden, und

$$V = \int^{\varrho+\varrho'+\varrho'' \ldots} W dx^\varrho dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots,$$

wo $\int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots}$ andeutet, dass die unter diesem Zeichen befindliche Grösse ϱ mal nach x, während $y, z\ldots$, ϱ' mal nach y, während $x, z\ldots$, ϱ'' mal nach z, während $x, y\ldots$ u. s. w. als constant betrachtet werden, integrirt werden soll.

Man hat alsdann, so fern man von der Variation der absolut-unabhängigen Grössen abstrahirt,

$$V_{(1)} = \int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} W_{(1)} dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots,$$

und
$$W_{(1)} = F\{x, y, z \ldots t + k\delta t,\ u + k\delta u \ldots\};$$

mithin, indem man diesen Ausdruck nach Potenzen von k entwickelt,

$$V_{(1)} = \int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} W dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots + k\int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} \delta W dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots$$

$$+ \frac{k^2}{1.2}\int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} \delta^2 W dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots + \ldots \frac{k^n}{1.2.3\ldots n}\int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} \delta^n W dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots +$$

u. s. w.;

folglich, dieses Resultat mit

$$V_{(1)} = V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots \frac{k^n}{1.2.3\ldots n}\delta^n V + \ldots$$

vergleichend,

$$\delta^n V = \int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} W dx^{\varrho} dy^{\varrho'} dz^{\varrho''} \ldots$$

Hiebei verdient aber bemerkt zu werden, dass, da hinsichtlich V jede Integration nach x eine beliebige Funktion von $y, z\ldots$, jede Integration nach y eine beliebige Funktion von $x, z\ldots$, jede Integration nach z eine beliebige Funktion $x, y\ldots$, u. s. w. erzeugt. die zur Bestimmung dieser Funktionen erforderlichen Bedingungen weder fehlen noch unberücksichtigt bleiben dürfen.

§. 18.

Es ist wohl einleuchtend, dass man auf eine ganz ähnliche Weise, und in Folge der §. §. 8 und 17 erhält

$$\mathfrak{d}^m(\mathfrak{d}^n V) = \mathfrak{d}^m \int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} \mathfrak{d}^n W \, dx^{\varrho} \, dy^{\varrho'} \, dz^{\varrho''} \ldots = \int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} \mathfrak{d}^m(\mathfrak{d}^n W) \, dx^{\varrho} \, dy^{\varrho'} \, dz^{\varrho''} \ldots$$

$$= \int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} \mathfrak{d}^{m+n} W \, dx^{\varrho} \, dy^{\varrho'} \, dz^{\varrho''} \ldots = \mathfrak{d}^{m+n} V = \mathfrak{d}^{m+n} \int^{\varrho+\varrho'+\varrho''\ldots} W \, dx^{\varrho} \, dy^{\varrho'} \, dz^{\varrho''} \ldots;$$

mithin

$$\mathfrak{d}^{m+n} \int^{(\varrho-\mu)+(\varrho'-\mu')+(\varrho''-\mu'')\ldots} W \, dx^{\varrho-\mu} \, dy^{\varrho'-\mu'} \, dz^{\varrho''-\mu''} \ldots$$

$$= \mathfrak{d}^m \int^{(\varrho-\mu)+(\varrho'-\mu')+(\varrho''-\mu'')\ldots} \mathfrak{d}^n W \, dx^{\varrho-\mu} \, dy^{\varrho'-\mu'} \, dz^{\varrho''-\mu''} \ldots$$

$$= \int^{(\varrho-\mu)+(\varrho'-\mu')+(\varrho''-\mu'')\ldots} \mathfrak{d}^{m+n} W \, dx^{\varrho-\mu} \, dy^{\varrho'-\mu'} \, dz^{\varrho''-\mu''} \ldots;$$

woraus ferner

$$\frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\ldots} \mathfrak{d}^{m+n} V}{dx^{\mu} \, dy^{\mu'} \, dz^{\mu''} \ldots} = \mathfrak{d}^m \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\ldots} \mathfrak{d}^n V}{dx^{\mu} \, dy^{\mu'} \, dz^{\mu''} \ldots} = \mathfrak{d}^{m+n} \frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\ldots} V}{dx^{\mu} \, dy^{\mu'} \, dz^{\mu''} \ldots}$$

folgt.

Vergleicht man dieses Resultat mit denen von §. 8 und §. 14, so sieht man leicht, indem man sie mit der Bestimmung des §. 4 in Verbindung bringt, dass, es sei V unmittelbar als eine algebraische oder transcendente Funktion einer beliebigen Anzahl absolut- und relativ-unabhängiger Grössen gegeben, es sei diese Grösse durch Differenziation oder Integration aus einer solchen abzuleiten sei,

$\dfrac{d^{\mu+\mu'+\mu''\ldots} \mathfrak{d}^n V}{dx^{\mu} \, dy^{\mu'} \, dz^{\mu''} \ldots}$, durch die Substitution von $t + k\delta t$, $u + k\delta u \ldots$ an die Stelle von $t, u \ldots$, diese als relativ-unabhängig betrachtet, übergeht in

$$\frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\cdots}\,\delta^n V}{dx^{\mu}\,dy^{\mu'}\,dz^{\mu''}\cdots}+k\,\frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\cdots}\,\delta^{n+1} V}{dx^{\mu}\,dy^{\mu'}\,dz^{\mu''}\cdots}+\frac{k^2}{1.2}\,\frac{d^{\mu+\mu'+\mu''\cdots}\,\delta^{n+2} V}{dx^{\mu}\,dy^{\mu'}\,dz^{\mu''}\cdots}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{k^m}{1.2\ldots m}\,\frac{d^{\mu+\mu'+\mu'\cdots}\,\delta^{n+m} V}{dx^{\mu}\,dy^{\mu'}\,dz^{\mu''}\cdots}+\cdots$$

§. 19.

Inzwischen finden die vorigen Resultate nur in so fern statt, als bloss die Variationen der relativ-unabhängigen Grössen in Betracht gezogen werden. Um aber auch die der absolut-unabhängigen Grössen zu berücksichtigen, verdient überlegt zu werden, dass, um uns an den einfachen Fall des §. 16 zu halten, wenn wir $x+k\delta x=x_{(1)}$ setzen, slsdann

$$V_{(1)}=\int^{\varrho} F\left\{x_{(1)}, y+k\delta y, z+k\delta z, t+k\delta t\ldots\right\} dx^{\varrho}_{(1)}$$

ist. Nun ist offenbar dieser Ausdruck gleich

$$\int^{\varrho} F\left\{x, y+k\delta y, z+k\delta z, t+k\delta t\ldots\right\} dx^{\varrho},$$

so fern man hierin nach der Integration $x_{(1)}=x+k\delta x$ an die Stelle von x setzt. Bezeichnet man daher die Variationen der verschiedenen Ordnungen von V, so fern sie von den relativ-unabhängigen Grössen dependiren, mit δ_1; so hat man

$$\int^{\varrho} F\left\{x, y+k\delta y, z+k\delta z, t+k\delta t\ldots\right\}=V+k\delta_1 V+\frac{k^2}{1.2}\delta_1^2 V+\frac{k^3}{1.2.3}\delta_1^3 V+\cdots,$$

und, indem man hierin $x+k\delta x$ an die Stelle von x setzt, und das Resultat nach Potenzen von k entwickelt,

$$V_{(1)}=V+k\delta V+\frac{k^2}{1.2}\delta^2 V+\frac{k^3}{1.2.3}\delta V+\cdots\frac{k^n}{1.2.3\ldots n}\delta^n V+\cdots,$$

worin

$$\delta^n V = \overset{r}{\underset{0\ldots n}{S}} \frac{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots n}{1.\ 2.\ 3\ldots(n-r)} \frac{d^{n-r}\ \delta_1^r V}{dx^{n-r}}$$

ist (§. 9).

Man übersieht leicht, dass die Resultate diesem vollkommen analog ausfallen werden, wie viele absolut-unabhängige Grössen auch zu Grunde liegen mögen.

§. 20.

Ist die Grösse V vermittelst einer Differenzial-Gleichung von der Form

$$F\left\{V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \ldots \frac{d^\varrho V}{dx^\varrho}, x, y, z, t \ldots\right\} = o,$$

welche, der Kürze halber, durch $W = o$ dargestellt werden mag, gegeben; so lassen sich daraus wiederum Differenzial-Gleichungen für die Variationen der verschiedenen Ordnungen von V ableiten. Denn, da durch die Substitution von $y + k\delta y,\ z + k\delta z,\ t + k\delta t \ldots$ anstatt $y, z, t \ldots$, diese als relativ-unabhängig betrachtet, $\frac{d^\mu V}{dx^\mu}$ übergeht in

$$\frac{d^\mu V}{dx^\mu} + k \frac{d^\mu \delta V}{dx^\mu} + \frac{k^2}{1.2} \frac{d^\mu \delta^2 V}{dx^\mu} + \ldots \frac{k^n}{1.2.3\ldots n} \frac{d^\mu \delta^n V}{dx^\mu} + \ldots,$$

nach §. 18; so hat man

$$F\left\{\begin{matrix} V + k\delta V + \ldots,\ \frac{dV}{dx} + k\frac{d\delta V}{dx} + \ldots,\ \frac{d^2V}{dx^2} + k\frac{d^2\delta V}{dx^2} + \ldots,\ \frac{d^\varrho V}{dx^\varrho} + k\frac{d^\varrho \delta V}{dx^\varrho} + \ldots, \\ x, y + k\delta y,\ z + k\delta z,\ t + k\delta t \ldots \end{matrix}\right\} = o$$

unabhängig von k und den Variationen, $\delta y, \delta z, \delta t \ldots$

Entwickelt man die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitzeichens nach Potenzen von k, so erlangt man die Form

$$W + C_1 k + C_2 k^2 + C_3 k^3 + \ldots = o;$$

mithin $W = o,\ C_1 = o,\ C_2 = o,$ u. s. w.

Die erste dieser Gleichungen ist nichts anders, als die vorgegebene selbst, und die zweite liefert offenbar, da C_1 ausser $V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \ldots x, y, z, t \ldots$ noch die Grössen $\delta V, \frac{d\delta V}{dx}, \frac{d^2\delta V}{dx^2}, \delta y, \delta z, \delta t \ldots$ enthält, eine Differenzial-Gleichung der ϱ^{ten} Ordnung für δV. Da nun $\frac{d^\mu \delta V}{dx^\mu} = \delta \frac{d^\mu V}{dx^\mu}$ ist, so ist $C = \delta W$, so fern nehmlich $\frac{d^\mu V}{dx^\mu}$, ganz allgemein, als relativ-unabhängig betrachtet wird. Unter dieser Voraussetzung, und mit Berücksichtigung der identischen Gleichung . . . $\frac{d^\mu \delta V}{dx^\mu} = \delta \frac{d^\mu V}{dx^\mu}$ hat man daher

$$\delta W = o$$

als Differenzial-Gleichung für die Variation der ersten Ordnung von V.

Substituirt man ferner in δW anstatt $y, z, t \ldots$ die Grössen $y + k\delta y,\ z + k\delta z,\ t + k\delta t \ldots,$ und überlegt, dass zugleich, ganz allgemein,

$$\frac{d^\mu V}{dx^\mu} \text{ in } \frac{d^\mu V}{dx^\mu} + k\frac{d^\mu \delta V}{dx^\mu} + \frac{k^2}{1.2}\frac{d^\mu \delta^2 V}{dx^\mu} + \ldots,$$

$$\text{und } \frac{d^\mu \delta V}{dx^\mu} \text{ in } \frac{d^\mu \delta V}{dx^\mu} + k\frac{d^\mu \delta^2 V}{dx^\mu} + \frac{k^2}{1.2.}\frac{d^\mu \delta^3 V}{dx^\mu} + \ldots,$$

übergehen (§. 18): so erlangt man, das Resultat nach Potenzen von k entwickelnd, die Form

$$\delta W + kC_1^{(1)} + C_2^{(1)}k^2 + C_3^{(1)}k^3 + \ldots = o,$$

und zwar unabhängig von k; folglich

$$\delta W = o, C_1^{(1)} = o, C_2^{(1)} = o, \text{ u. s. w.}$$

Ueberlegt man nun, dass $\frac{d^\mu \delta^2 V}{dx^\mu} = \delta \frac{d^\mu \delta V}{dx^\mu}$ ist; so leuchtet ein, dass

$$C_1^{(1)} = \delta(\delta W) = \delta^2 W$$

ist, so fern nehmlich sowohl $\frac{d^\mu V}{dx^\mu}$, als $\frac{d^\mu \delta V}{dx^\mu}$ als relativ-unabhängige Grössen betrachtet werden. Unter dieser Voraussetzung hat man daher

$$\delta^2 W = o$$

als Differenzial-Gleichung für die Variation der zweiten Ordnung von V.

Ueberhaupt geht hieraus hervor, dass die Differenzial-Gleichungen für die Variationen der verschiedenen Ordnungen von V durch allmähliges Variiren der vorgegebenen aus einander abgeleitet werden könneu, indem man die Variationen von $V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \ldots$ als neue relativ-unabhängige Grössen betrachtet, und die identische Gleichung $\delta^m \frac{d^\mu \delta^n V}{dx^\mu} = \frac{d^\mu \delta^{m+n} V}{dx^\mu}$ berücksichtigt. Unter dieser Voraussetzung nehmlich liefert

$$\delta^n W = o$$

eine Differenzial-Gleichung für die Variation der n^{ten} Ordnung von V, die mit der vorgegebenen Gleichung $W = o$ rücksichtlich der Differenzial-Coefficienten von einer und derselben Ordnung seyn wird.

Es leuchtet nicht weniger ein, dass die, auf diese Weise, für die Variation der n^{ten} Ordnung von V hervortretende Differenzial-Gleichung nebst $\delta^n V$ zugleich die Variationen aller niedrigern Ordnungen enthalten wird. So fern also die Frage nach der n^{ten} Variation von V entsteht, wird man vermittelst der $(n\text{-}1)$ vorhergehenden Gleichungen die Variationen aller niedrigern Ordnungen zu eliminiren, und darauf die resultirende Differenzial-Gleichung zu integriren haben. Da die Integral-Gleichung ϱ beliebige Constanten enthalten wird, so fern die vorgegebene von der ϱ^{ten} Ordnung ist; so werden die Werthe von $V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \ldots \frac{d^{\varrho-1} V}{dx^{\varrho-1}}$ für irgend einen Werth von x, z. B. $x = a$, gegeben seyn müssen, wenn sowohl V, als überhaupt $\delta^n V$ besiimmt seyn soll. Dieses vorausgesetzt, hat man zur Bestimmung jener Constanten, wie man sich, in Folge von §. 16, sehr leicht überzeugt, die Bedingung

$$\frac{\partial^\mu \delta^n V}{dx^\mu} = o$$

für $x = a$, von $\mu = o$ bis $\mu = \varrho - 1$ eingeschlossen.

Die Variationen der verschiedenen Ordnungen von V, so fern solche von den Variationen der relativ-unabhängigen Grössen dependiren, auf diese Weise als bestimmt vorausgesetzt, wird man solche mit Rücksicht auf die Variation der absolut-unabhängigen Grösse, nach der oben schon mehrmals bezeichneten Methode, sehr leicht entwickeln können.

Es bedarf wohl kaum bemerkt zu werden, dass die Resultate diesem vollkommen analog bleiben, wie viele absolut-unabhängige Grössen auch zu Grunde liegen mögen.

§. 21.

Bis hiezu betrachteten wir zwar beständig Ausdrücke, in denen keine Differenzial-Coefficienten von den relativ-unabhängigen Grössen enthalten waren. Inzwischen leuchtet es ein, dass dieser Fall sogleich auf den vorigen zurück geführt werden kann, indem man nur einen jeden der Differenzial-Coefficienten als eine selbstständige, relativ-unabhängige Grösse betrachtet, und dabei die Gleichung . . .

$\delta \frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \frac{d^\mu \delta y}{dx^\mu}$ (§. 14) berücksichtigt, wie solches im folgenden Kapitel noch näher wird gezeigt werden.

ZWEITES KAPITEL.

Entwickelung und Transformation der Variation erster Ordnung von unbestimmten Integral-Formeln, zwischen gegebenen Grenzen genommen.

§. 22.

In so fern wir die relativ-unabhängigen Grössen nebst ihren Variationen, in Funktionen der absolut-unabhängigen Grössen, als gegeben voraussetzen, enthalten die vorigen Betrachtungen alles, was zur Bestimmung der Variation irgend einer Ordnung einer, es sei auf eine entwickelte Weise, es sei vermittelst einer primitiven, oder einer Differenzial-Gleichung, gegebenen Grösse von der Variations-Rechnung gefordert werden kann; nachdem durch dieselben alles auf Differenziation und Integration, als bekannte analytische Operationen, zurückgeführt worden ist. Allein bei der Anwendung dieser Prinzipien auf Aufgaben möchte diesen Voraussetzungen wohl höchst selten entsprochen werden. Zu den interessantesten Anwendungen, die man bis-

jetzt von der Variations-Rechnung gemacht hat; gehören diejenigen, welche die Bestimmung der grössten und kleinsten Werthe unbestimmter Integral-Formeln, zwischen bestimmten Gränzen genommen, zum Gegenstande haben. Die relativ-unabhängigen Grössen sind hier gerade die fraglichen, und ihre Variationen bleiben gänzlich unbestimmt. Die Variation der ersten Ordnung einer solchen Formel, welche hier vorzugsweise in Betracht kommt, bedarf zu diesem Zwecke einer Transformation, mit der man sich besonders zu befreunden hat, wenn man die Anwendung der bisjetzt dargestellten Prinzipien, ihrem wahren Geiste nach, auf zu fassen wünscht. Es ist aus diesem Grunde, dass es nicht überflüssig seyn wird, diesem Gegenstande eine besondere Betrachtung zu widmen.

§. 23.

Es sei

$$W = F\left\{\begin{array}{l} x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^my}{dx^m};\; z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}; \\ t, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}, \frac{d^3t}{dx^3}, \ldots \frac{d^pt}{dx^p};\; u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3}, \ldots \frac{d^qt}{dx^q}; \ldots \end{array}\right\},$$

wo x als absolut-, $y, z, t, u \ldots$ hingegen als relativ-unabhängig betrachtet werden, und F eine beliebige algebraische oder transcendente Funktion von den sich unter diesem Zeichen befindlichen Grössen andeuten soll; ferner sei

$$V = \int W\,dx,$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt, und die Frage nach δV.

Setzt man, der Bequemlichkeit wegen,

$$\frac{dy}{dx}=y', \frac{d^2y}{dx^2}=y'', \frac{d^3y}{dx^3}=y''', \ldots \frac{d^my}{dx^m}=y^{(m)};$$

$$\frac{dz}{dx}=z', \frac{d^2z}{dx^2}=z'', \frac{d^3z}{dx^3}=z''', \ldots \frac{d^nz}{dx^n}=z^{(n)};$$

$$\frac{dt}{dx}=t', \frac{d^2t}{dx^2}=t'', \frac{d^3t}{dx^3}=t''', \ldots \frac{d^pt}{dx^p}=t^{(p)};$$

$$\frac{du}{dx}=u', \frac{d^2u}{dx^2}=u'', \frac{d^3u}{dx^3}=u''', \ldots \frac{d^qu}{dx^q}=u^{(q)};$$

u. s. w.

so ist

$$W=\left\{\begin{array}{l} x, y, y', y'', y''', \ldots y^{(m)};\ z, z', z'', z''', \ldots z^{(n)}; \\ t, t', t'', t''', \ldots t^{(p)};\ u, u', u'', u''', \ldots u^{(q)}; \ldots \end{array}\right\}$$

folglich, indem überhaupt

$$\delta y^{(r)}=\frac{d^r\delta y}{dx^r},\ \delta z^{(r)}=\frac{d^r\delta z}{dx^r},\ \delta t^{(r)}=\frac{d^r\delta t}{dx^r},\ \delta u^{(r)}=\frac{d^r\delta u}{dx^r}, \ldots$$

ist (§. 12.),

$$\delta W=\left(\frac{dW}{dy}\right)\delta y+\left(\frac{dW}{dy'}\right)\frac{d\delta y}{dx}+\left(\frac{dW}{dy''}\right)\frac{d^2\delta y}{dx^2}+\ldots\left(\frac{dW}{dy^{(m)}}\right)\frac{d^m\delta y}{dx^m}$$

$$+\left(\frac{dW}{dz}\right)\delta z+\left(\frac{dW}{dz}\right)\frac{d\delta z}{dx}+\left(\frac{dW}{dz''}\right)\frac{d^2\ z}{dx^2}+\ldots\left(\frac{dW}{dz^{(n)}}\right)\frac{d^n\delta z}{dx^n}$$

$$+\left(\frac{dW}{dt}\right)\delta t+\left(\frac{dW}{dt'}\right)\frac{d\delta t}{dx}+\left(\frac{dW}{dt''}\right)\frac{d^2\delta t}{dx^2}+\ldots\left(\frac{dW}{dt^{(p)}}\right)\frac{d^p\delta t}{dx^p}$$

$$+\left(\frac{dW}{du}\right)\delta u+\left(\frac{dW}{du'}\right)\frac{d\delta u}{dx}+\left(\frac{dW}{du''}\right)\frac{d^2\delta u}{dx^2}+\ldots\left(\frac{dW}{du^{(q)}}\right)\frac{d^q\delta u}{dx^q}$$

u. s. w.,

so fern man von der Variation von x absrahirt.

Bezeichnet man ferner, der Kürze halber,

$$\left(\frac{dW}{dy}\right) \text{ mit } Y, \left(\frac{dW}{dz}\right) \text{ mit } Z, \left(\frac{dW}{dt}\right) \text{ mit } T, \left(\frac{dW}{du}\right) \text{ mit } U;$$

$$\left(\frac{dW}{dy'}\right) \text{ mit } \overset{1}{Y}, \left(\frac{dW}{dz'}\right) \text{ mit } \overset{1}{Z}, \left(\frac{dW}{dt'}\right) \text{ mit } \overset{1}{T}, \left(\frac{dW}{du'}\right) \text{ mit } \overset{1}{U};$$

$$\left(\frac{dW}{dy''}\right) \text{ mit } \overset{2}{Y}, \left(\frac{dW}{dz''}\right) \text{ mit } \overset{2}{Z}, \left(\frac{dW}{dt''}\right) \text{ mit } \overset{2}{T}, \left(\frac{dW}{du''}\right) \text{ mit } \overset{2}{U};$$

überhaupt $$\left(\frac{dW}{dy^{(r)}}\right) \text{ mit } \overset{r}{Y}, \left(\frac{dW}{dz_{(r)}}\right) \text{ mit } \overset{r}{Z}, \left(\frac{dW}{dt^{(r)}}\right) \text{ mit } \overset{r}{T}, \left(\frac{dW}{du^{(r)}}\right) \text{ mit } \overset{r}{U};$$

wie auch

$$\overset{1}{Y}\frac{d\delta y}{dx} + \overset{2}{Y}\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \overset{3}{Y}\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \ldots \overset{m}{Y}\frac{d^m\delta y}{dx^m} \text{ mit } \overset{r}{{}^{1\ldots m}\Sigma}\, \overset{r}{Y}\frac{d^r\delta y}{dx^r};$$

$$\overset{1}{Z}\frac{d\delta z}{dx} + \overset{2}{Z}\frac{d^2\delta z}{dx^2} + \overset{3}{Z}\frac{d^3\delta z}{dx^3} + \ldots \overset{n}{Z}\frac{d^n\delta z}{dx^n} \text{ mit } \overset{r}{{}^{1\ldots n}\Sigma}\, \overset{r}{Z}\frac{d^r\delta z}{dx^r};$$

$$\overset{1}{T}\frac{d\delta t}{dx} + \overset{2}{T}\frac{d^2\delta t}{dx^2} + \overset{3}{T}\frac{d^3\delta t}{dx^3} + \ldots \overset{p}{T}\frac{d^p\delta t}{dx^p} \text{ mit } \overset{r}{{}^{1\ldots p}\Sigma}\, \overset{r}{T}\frac{d^r\delta t}{dx^r};$$

$$\overset{1}{U}\frac{d\delta u}{dx} + \overset{2}{U}\frac{d^2\delta u}{dx^2} + \overset{3}{U}\frac{d^3\delta u}{dx^3} + \ldots \overset{q}{U}\frac{d^q\delta u}{dx^q} \text{ mit } \overset{r}{{}^{1\ldots q}\Sigma}\, \overset{r}{U}\frac{d^r\delta u}{dx^r};$$

u. s. w.:

so hat man

$$\delta W = Y\delta y + \overset{r}{{}^{1\ldots m}\Sigma}\, \overset{r}{Y}\frac{d^r\delta y}{dx^r} + Z\delta z + \overset{r}{{}^{1\ldots n}\Sigma}\, \overset{r}{Z}\frac{d^r\delta z}{dx^r}$$

$$+ T\delta t + \overset{r}{{}^{1\ldots p}\Sigma}\, \overset{r}{T}\frac{d^r\delta t}{dx^r} + U\delta t + \overset{r}{{}^{1\ldots q}\Sigma}\, \overset{r}{U}\frac{d^r\delta u}{dx^r};$$

u. s. w.;

folglich da $\delta V = \int \delta W \, dx$,
das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen (§. 16),
wie auch

$$\int dx \; {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \; \overset{r}{Y} \frac{d^r \delta y}{dx^r} = {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \int \overset{r}{Y} \frac{d^r \delta y}{dx^r} \, dx,$$

$$\int dx \; {}^{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \; \overset{r}{Z} \frac{d^r \delta z}{dx^r} = {}^{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \int \overset{r}{Z} \frac{d^r \delta z}{dx^r} \, dx,$$

u. s. w.

ist,

$$\delta V = \int \delta W dx = \int Y \delta y dx + {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \int \overset{r}{Y} \frac{d^r \delta y}{dx^r} dx^r + \int Z \delta z dx + {}^{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \int \overset{r}{Z} \frac{d^r \delta z}{dx^r} \, dx$$

$$+ \int T \delta t \, dx + {}^{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \int \overset{r}{T} \frac{d^r \delta t}{dx^r} dx + \int U \delta u dx + {}^{1\ldots q}\overset{r}{\Sigma} \int \overset{r}{U} \frac{d^r \delta u}{dx^r} \, dx$$

u. s. w.,

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Die Haupt-Transformation, deren dieser Ausdruck zum Behufe der oben näher bezeichneten Anwendung bedarf, kommt darauf zurück, die Differenzial-Coefficienten der verschiedenen Ordnungen der Variationen δy, δz, δt, δu u. s. w. von dem Integrations-Zeichen zu befreien.

Zu diesem Ende verdient bemerkt zu werden, dass, wenn P und Q irgend welche Funktionen von x bezeichnen, den Anfangsgründen der Integral-Rechnung gemäss,

$$\int P \frac{d^r Q}{dx^r} dx = \pm \int \frac{d^r P}{dx^r} Q dx + P \frac{d^{r-1} Q}{dx^{r-1}} - \frac{dP}{dx} \frac{d^{r-2} Q}{dx^{r-2}} + \frac{d^2 P}{dx^2} \frac{d^{r-3} Q}{dx^{r-3}} - \ldots + C$$

ist. Das obere Zeichen findet statt, wenn r eine gerade, das untere hingegen, wenn r eine ungerade Zahl ist; auch dürfen die, von dem Integrations-Zeichen befreiten Glieder, für die verschiedenen Werthe von r, nur so weit genommen werden, als die Ordnungs-Zahlen der Differenzial-Coefficienten von P, mit Einschluss der Null, positiv ausfallen. Diesem nach lässt sich der Inbegriff dieser Glieder auf eine bequeme Weise durch

$$\overset{\mu}{\underset{1 \ldots r}{\mathrm{S}}} \mp \frac{d^{\mu-1} P}{dx^{\mu-1}} \frac{d^{r-\mu} Q}{dx^{r-\mu}} + C$$

darstellen, wo das obere Zeichen genommen werden muss, wenn μ eine gerade, das untere aber, wenn μ eine ungerade Zahl ist, und C eine beliebige Constante bedeutet. Unter dieser Voraussetzung hat man

$$\int P \frac{d^r Q}{dx^r} dx = \pm \int \frac{d^r P}{dx^r} Q dx + \overset{\mu}{\underset{1 \ldots r}{\mathrm{S}}} \mp \frac{d^{\mu-1} P}{dx^{\mu-1}} \frac{d^{r-\mu} Q}{dx^{r-\mu}} + C.$$

Wenden wir diesen Satz auf die obigen Integral-Ausdrücke an, so erlangen wir, indem wir $\overset{r}{Y}$ an die Stelle von P und δy an die Stelle Q treten lassen,

$$\int \overset{r}{Y} \frac{d^r \delta y}{dx^r} dx = \pm \int \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} \delta y dx + \overset{\mu}{\underset{1 \ldots r}{\mathrm{S}}} \mp \frac{d^{\mu-1} \overset{r}{Y}}{dx^{\mu-1}} \frac{d^{r-\mu} y}{dx^{r-\mu}} + C;$$

folglich, da

$$\overset{r}{\underset{1 \ldots m}{\Sigma}} \pm \int \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} \delta y dx = \int dx \overset{r}{\underset{1 \ldots m}{\Sigma}} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} \delta y$$

ist,

$$\overset{r}{\underset{1 \ldots m}{\Sigma}} \int \overset{r}{Y} \frac{d^r \delta y}{dx^r} dx = \int dx \overset{r}{\underset{1 \ldots m}{\Sigma}} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} \delta y + \underset{1 \ldots m}{\Sigma} \overset{\mu}{\underset{1 \ldots r}{\mathrm{S}}} \mp \frac{d^{\mu-1} \overset{r}{Y}}{dx^{\mu-1}} \frac{d^{r-\mu} \delta y}{dx^{r-\mu}}$$

$$+ \overset{r}{\underset{1 \ldots m}{\Sigma}} C.$$

Es ist leicht einzusehen, dass man für die, aus den Variationen von $z, t, u \ldots$ entspringenden Grössen ähnliche Formen erhält. Substituirt man daher diese Formen, so erlangt man

$$\begin{aligned}
\delta V = \int \delta y \left\{ Y + {}_{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} \right\} dx + {}_{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma}\; {}_{1\ldots r}\overset{\mu}{S} \mp \frac{d^{\mu-1}\, \overset{r}{Y}}{dx^{\mu-1}} \cdot \frac{d^{r-\mu}\, \delta y}{dx^{r-\mu}} \\
+ \int \delta z \left\{ Z + {}_{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Z}}{dx^r} \right\} dx + {}_{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma}\; {}_{1\ldots r}\overset{\mu}{S} \mp \frac{d^{\mu-1}\, \overset{r}{Z}}{dx^{\mu-1}} \cdot \frac{d^{r-\mu}\, \delta z}{dx^{r-\mu}} \\
+ \int \delta t \left\{ T + {}_{1\ldots p}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^r \overset{r}{T}}{dx^r} \right\} dx + {}_{1\ldots p}\overset{r}{\Sigma}\; {}_{1\ldots r}\overset{\mu}{S} \mp \frac{d^{\mu-1}\, \overset{r}{T}}{dx^{\mu-1}} \frac{d^{r-\mu}\, \delta u}{dx^{r-\mu}} \\
+ \int \delta u \left\{ U + {}_{1\ldots q}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^r \overset{r}{U}}{dx^r} \right\} dx + {}_{1\ldots q}\overset{r}{\Sigma}\; {}_{1\ldots r}\overset{\mu}{S} \mp \frac{d^{\mu-1}\, \overset{r}{U}}{dx^{\mu-1}} \frac{d^{r-\mu}\, \delta u}{dx^{r-\mu}}
\end{aligned}$$

u. s. w. $+ C$,

von $x = a$ bis $x = b$ genommen, wo die obern Zeichen gelten, wenn r und μ gerade, die untern hingegen, wenn sie ungerade Zahlen sind.

Wünscht man zugleich die Variation der absolut-unabhängigen Grösse x zu berücksichtigen, so tritt nach den §. §. 9 und 10 noch das Glied $W\delta x$ hinzu.

Eine zweite Transformation der Form von δV betrifft die entwickelte Darstellung des von dem Integrations Zeichen befreiten Theiles. Es ist nehmlich für die Anwendung höchst wichtig, diese so einzurichten, dass sie nach den Ordnungszahlen der Differenzial-Verhältnisse von den Variationen δy, δz, δt, $\delta u \ldots$ fortschreite. Nimmt man daher den Ausdruck

$$ {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma}\ {}^{1\ldots r}\overset{\mu}{S} \mp \frac{d^{\mu-1}\overset{r}{Y}}{x d^{\mu-1}} \frac{d^{r-\mu}\delta y}{dx^{r-\mu}}\,, $$

und entwickelt denselben nach diesem Prinzipe, so erhält man

$$ \delta y\ {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}}{dx^{r-1}} + \frac{d\delta y}{dx}\ {}^{2\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}}{dx^{r-2}} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\ {}^{3\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-3}\overset{r}{Y}}{dx^{r-3}} + \ldots \mp \frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}}\overset{m}{Y} $$

Aehnliche Ausdrücke finden offenbar für die analogen Grössen statt, welche aus den Variationen von z, t, u u. s. w. entstehen. Mit Rücksicht auf die Variation von x hat man demnach

$$ \delta V = \int \delta y \left\{ Y + {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} \right\} dx + \int \delta z \left\{ Z + {}^{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Z}}{dx_r} \right\} dx $$

$$ + \int \delta t \left\{ T + {}^{1\ldots p}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{T}}{dx^r} \right\} dx + \int \delta u \left\{ U + {}^{1\ldots q}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{U}}{dx^r} \right\} dx $$

u. s. w.

$$ + \delta y\ {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}}{dx^{r-1}} + \frac{d\delta y}{dx}\ {}^{2\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}}{dx^{r-2}} + \frac{d^2\delta y}{dx^2}\ {}^{3\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-3}\overset{r}{Y}}{dx^{r-3}} + \ldots \mp \frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}}\overset{m}{Y} $$

$$ + \delta z\ {}^{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Z}}{dx^{r-1}} + \frac{d\delta z}{dx}\ {}^{2\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Z}}{dx^{r-2}} + \frac{d^2\delta z}{dx^2}\ {}^{3\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-3}\overset{r}{Z}}{dx^{r-3}} + \ldots \mp \frac{d^{n-1}\delta z}{dx^{n-1}}\overset{n}{Z} $$

$$ + \delta t\ {}^{1\ldots p}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{T}}{dx^{r-1}} + \frac{d\delta t}{dx}\ {}^{2\ldots p}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{T}}{dx^{r-2}} + \frac{d^2\delta t}{dx^2}\ {}^{3\ldots p}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-3}\overset{r}{T}}{dx^{r-3}} + \ldots \mp \frac{d^{p-1}\delta t}{dx^{p-1}}\overset{p}{T} $$

$$ + \delta u\ {}^{1\ldots q}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{U}}{dx^{r-1}} + \frac{d\delta u}{dx}\ {}^{2\ldots q}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{U}}{dx^{r-2}} + \frac{d^2\delta u}{dx^2}\ {}^{3\ldots q}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-3}\overset{r}{U}}{dx^{r-3}} + \ldots \mp \frac{d^{q-1}\delta u}{dx^{q-1}}\overset{q}{U} $$

u. s. w.

$+ W dx + C$

von $x = a$ bis $x = b$.

Um nun den Werth dieses Ausdrucks zwischen den bezeichneten Grenzen zu erhalten, hat man bekanntlich in demselben anstatt x erst den Werth von a, alsdann den von b zu substituiren, und ersteres Resultat vom letzteren abzuziehen.

Es sei daher für $x = a$

$\delta x = \delta a$, $\delta y = \delta y_{(1)}$, $\delta z = \delta z_{(1)}$, $\delta t = \delta t_{(1)}$, $\delta u = \delta u_{(1)}$ u. s. w.;

$W = W_{(1)}$, $\overset{r}{Y} = \overset{r}{Y}_{(1)}$, $\overset{r}{Z} = \overset{r}{Z}_{(1)}$, $\overset{r}{T} = \overset{r}{T}_{(1)}$, $\overset{r}{U} = \overset{r}{U}_{(1)}$ u. s. w.;

und für $x = b$

$\delta x = \delta b$, $\delta y = \delta y_{(2)}$, $\delta z = \delta z_{(2)}$, $\delta t = \delta t_{(2)}$, $\delta u = \delta u_{(2)}$ u. s. w.;

$W = W_{(2)}$, $\overset{r}{Y} = \overset{r}{Y}_{(2)}$, $\overset{r}{Z} = \overset{r}{Z}_{(2)}$, $\overset{r}{T} = \overset{r}{T}_{(2)}$, $\overset{r}{U} = \overset{r}{U}_{(2)}$ u. s. w.

Substituirt man nun im obigen Ausdrucke beide diese Systeme von Werthen nach einander, und verrichtet die geforderte Subtraction; so erhält man, indem man die Grössen, in welche allgemein $\frac{d^{r-\mu}\overset{r}{Y}}{dx^{r-\mu}}$ für $x = a$ und $x = b$ übergeht, mit $\frac{d^{r-\mu}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-\mu}}$ und $\frac{d^{r-\mu}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-\mu}}$ bezeichnet,

$$\delta V = \int \delta y \left\{ Y + {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r\,\overset{r}{Y}}{dx^r} \right\} dx + \int \delta z \left\{ Z + {}^{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r\,\overset{r}{Z}}{dx^r} \right\} dx$$

$$= \int \delta t \left\{ T + {}^{1\ldots p}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r\,\overset{r}{T}}{dx^r} \right\} dx + \int \delta u \left\{ U + {}^{1\ldots q}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r\,\overset{r}{U}}{dx^r} \right\} dx$$

u. s. w.

$$+\delta y_{(2)}\,{}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-1}} + \frac{d\delta y_{(2)}}{db}\,{}^{2\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}} + \frac{d^2\delta y_{(2)}}{db^2}\,{}^{3\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-3}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-3}} + \ldots \mp \frac{d^{m-1}\delta y_{(2)}}{db^{m-1}}\overset{m}{Y}_{(2)}$$

$$+\delta z_{(2)}\,{}^{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Z}_{(2)}}{db^{r-1}} + \frac{d\delta z_{(2)}}{db}\,{}^{2\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Z}_{(2)}}{db^{r-2}} + \frac{d^2\delta z_{(2)}}{db^2}\,{}^{3\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-3}\overset{r}{Z}_{(1)}}{db^{r-3}} + \ldots \mp \frac{d^{n-1}\delta z_{(2)}}{db^{n-1}}\overset{n}{Z}_{(2)}$$

$$+\delta t_{(2)}{}^{\overset{r}{1\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{T}_{(2)}}{db^{r-1}}+\frac{d\delta t_{(2)}}{db}{}^{\overset{r}{2\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{T}_{(2)}}{db^{r-2}}+\frac{d^2\delta t_{(2)}}{db^2}{}^{\overset{r}{3\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{T}_{(2)}}{db^{r-3}}+\ldots\mp\frac{d^{p-1}\delta t_{(2)}}{db^{p-1}}\overset{p}{T}_{(2)}$$

$$+\delta u_{(2)}{}^{\overset{r}{1\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{U}_{(1)}}{db^{r-1}}+\frac{d\delta u_{(2)}}{db}{}^{\overset{r}{2\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{U}_{(2)}}{db^{r-2}}+\frac{d^2\delta u_{(2)}}{db^2}{}^{\overset{r}{3\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{U}_{(2)}}{db^{r-3}}+\ldots\mp\frac{d^{q-1}\delta u_{(2)}}{db^{q-1}}\overset{q}{U}_{(2)}$$

u. s. w.

$$-\delta y_{(1)}{}^{\overset{r}{1\ldots m}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-1}}-\frac{d\delta y_{(1)}}{da}{}^{\overset{r}{2\ldots m}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-2}}-\frac{d^2\delta y_{(1)}}{da^2}{}^{\overset{r}{3\ldots m}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-3}}-\ldots\pm\frac{d^{m-1}\delta y_{(1)}}{da^{m-1}}\overset{m}{Y}_{(1)}$$

$$-\delta z_{(1)}{}^{\overset{r}{1\ldots n}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{Z}_{(1)}}{da^{r-1}}-\frac{d\delta z_{(1)}}{da}{}^{\overset{r}{2\ldots n}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{Z}_{(1)}}{da^{r-2}}-\frac{d^2\delta z_{(1)}}{da^2}{}^{\overset{r}{3\ldots n}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{Z}_{(1)}}{da^{r-3}}-\ldots\pm\frac{d^{n-1}\delta z_{(1)}}{da^{n-1}}\overset{n}{Z}_{(1)}$$

$$-\delta t_{(1)}{}^{\overset{r}{1\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{T}_{(1)}}{da^{r-1}}-\frac{d\delta t_{(1)}}{da}{}^{\overset{r}{2\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{T}_{(1)}}{da^{r-2}}-\frac{d^2\delta t_{(1)}}{da^2}{}^{\overset{r}{3\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{T}_{(1)}}{da^{r-3}}-\ldots\pm\frac{d^{p-1}\delta t_{(1)}}{da^{p-1}}\overset{p}{T}_{(1)}$$

$$-\delta u_{(1)}{}^{\overset{r}{1\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{U}_{(1)}}{da^{r-1}}-\frac{d\delta u_{(1)}}{da}{}^{\overset{r}{2\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{U}_{(1)}}{da^{r-2}}-\frac{d^2\delta u_{(1)}}{da^2}{}^{\overset{r}{3\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{U}_{(1)}}{da^{r-3}}-\ldots\pm\frac{d^{q-1}\delta u_{(1)}}{da^{q-1}}\overset{q}{U}_{(1)}$$

u. s. w.

$$+W_{(2)}\delta b-W_{(1)}\delta a,$$

so fern man die Integrale von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt, und die oberen Zeichen nimmt, wenn r eine gerade, die untern hingegen, wenn r eine ungerade Zahl ist.

§. 25.

Im Falle W bloss eine algebraische oder transcendente Funktion von x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... ist, so ist $\delta z=o$, $\delta t=o$, $\delta u=o$ u. s. w., und man hat alsdann, mit Rücksicht auf die Variation von x,

$$V = \int \delta y \left\{ Y + \sum_{1,..m}^{r} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} \right\} dx$$

$$+\delta y_{(2)} \sum_{1...m}^{r} \mp \frac{d^{r-1} \overset{r}{Y}_{(1)}}{db^{r-1}} + \frac{d\delta y_{(2)}}{db} \sum_{2...m}^{r} \mp \frac{d^{r-2} \overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}} + \frac{d^2 \delta y_{(2)}}{db^2} \sum_{3...m}^{r} \mp \frac{d^{r-3} \overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-3}} + \ldots \mp \frac{d^{m-1} \delta y_{(2)}}{db^{m-1}} \overset{m}{Y}$$

$$-\delta y_{(1)} \sum_{1...m}^{r} \mp \frac{d^{r-1} \overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-1}} - \frac{d\delta y_{(1)}}{da} \sum_{2...m}^{r} \mp \frac{d^{r-2} \overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-2}} - \frac{d^2 \delta y_{(1)}}{da^2} \sum_{3...m}^{r} \pm \frac{d^{r-3} \overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-3}} - \ldots \pm \frac{d^{m-1} \delta y_{(1)}}{da^{m-1}} \overset{m}{Y}_{(1)}$$

$$+ W_{(2)}\, \delta b - W_{(1)}\, \delta a,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Ist W überdiess noch Funktion von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 z}{dx^2}$, . . . $\frac{d^n z}{dx^n}$; so kommt zu dem vorigen Ausdruck für δV noch folgender hinzu:

$$\int \delta z \left\{ Z + \sum_{1..m}^{r} \pm \frac{d^r \overset{r}{Z}}{dx^r} \right\} dx$$

$$+\delta z_{(2)} \sum_{1...n}^{r} \mp \frac{d^{r-1} \overset{r}{Z}_{(2)}}{db^{r-1}} + \frac{d\delta z_{(2)}}{db} \sum_{2...n}^{r} \mp \frac{d^{r-2} \overset{r}{Z}_{(2)}}{db^{r-2}} + \frac{d^2 \delta z_{(2)}}{db^2} \sum_{3...n}^{r} \mp \frac{d^{r-3} \overset{r}{Z}_{(2)}}{db^{r-3}} \ldots \mp \frac{d^{n-1} \delta z_{(2)}}{db^{n-1}} \overset{n}{Z}_{(2)}$$

$$-\delta z_{(1)} \sum_{1...n}^{r} \mp \frac{d^{r-1} \overset{r}{Z}_{(1)}}{da^{r-1}} - \frac{d\delta z_{(1)}}{da} \sum_{2...n}^{r} \mp \frac{d^{r-2} \overset{r}{Z}_{(1)}}{da^{r-2}} - \frac{d^2 \delta z_{(1)}}{da^2} \sum_{3...n}^{r} \mp \frac{d^{r-3} \overset{r}{Z}_{(1)}}{da^{r-3}} \ldots \pm \frac{d^{n-1} \delta z_{(1)}}{da^{n-1}} \overset{n}{Z}_{(1)}$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen.

Ist W ausserdem noch Funktion von $t, u \ldots$ und deren Differenzial-Coefficienten, so treten zu den vorigen Ausdrücken für δV noch Ausdrücke mit Beziehung auf diese Grössen hinzu, welche jenen Formen offenbar vollkommen analog sind; und es geht hieraus

ganz allgemein die Weise hervor, auf welche von der Variation von $\int W dx$, wo W nur eine einzige relativ-unabhängige Grösse enthält, zu derjenigen der Uebergang gemacht werden kann, wo W von einer beliebigen Anzahl derselben abhängig ist. Betrachtet man die Ausdrücke, welche für δV aus den Variationen der verschiedenen relativ-unabhängigen Grössen entstehen, näher, so sieht man, dass sie alle in zwei Hapttheile zerfallen, von denen der eine mit dem Integrations-Zeichen behaftet, der andere hingegen von solchem befreit, und lediglich von den, den Grenzen des Integrals entsprechenden Werthen abhängig ist. Dieser Theil, nach den Ordnungszahlen der Differenzial-Verhältnisse der Variationen geordnet, und auf beide Grenzen bezogen, enthält zweimal so viele Glieder, als in W die Ordnungszahl des höchsten Differenzial Coefficienten der betreffenden Grösse Einheiten enthält. Was den, unter dem Integrations-Zeichen befindlichen Theil anbelangt, so enthält die, z. B. in $\delta y dx$ multiplicirte Grösse ebenfalls Differenzial-Verhältnisse. Es ist aber einleuchtend, dass die Ordnungszahl des höchsten derselben niemals diejenige Zahl wird übersteigen können, welche man erhält, wenn man die Ordnungszahl des höchsen Differenzial-Coefficienten von y in W zu der höchsten Ordnungszahl der daselbst angedeuteten Differenziationen hinzu addirt. Es ist aber keinesweges der Fall, dass beide diese Zahlen einander stets gleich seyn müssen, nachdem der Differenzial-Coefficient einer abhängigen Grösse, in Beziehung auf eine der als unabhängig betrachteten genommen, bei gewissen Formen der Funktion, von dieser, mithin auch $\overset{m}{Y} = \left(\frac{dW}{dy^{(m)}}\right)$, unter gewissen Umständen, von $y^{(m)}$ unabhängig werden kann. Aehnliche Bemerkungen finden offenbar hinsichtlich der aus z, t, u . . . entspringenden Aus-

drücke statt. Auch sieht man, dass derjenige Theil von δV, welcher aus der Variation der absolut-unabhängigen Grösse x entsteht, von dem Integrations-Zeichen gänzlich befreit ist; und es leuchtet im Allgemeinen ein, dass, im Falle W, ausser den bezeichneten Grössen, noch andere enthielte, welche bloss von den Grenzwerthen für x, a und b nehmlich, abhängig wären, auf solche alsdann bei der Variation nach x Rücksicht genommen werden müsste.

§. 25.

Der Fall für $V = \int W \mathrm{d}x$, wo W eine algebraische oder transcendente Funktion von x, y, z, t, u . . . nebst deren Differenzial-Coefficienten bezeichnet, enthält offenbar die einfachste Form, unter welcher sich ein unbestimmter Integral-Ausdruck darbiethen kann. Diese als Element betrachtend, gelangt man zu zusammengesetztern Formen, von denen die Variation jedoch auf die vorige Gestalt mit Leichtigkeit zurückgeführt wird.

Es sei, um dieses näher zu zeigen,

$$\Pi = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots \frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m}\right), \; \Delta = \int \Pi \, \mathrm{d}x;$$

$$\Pi^{(1)} = f^{(1)}\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right), \; \Delta^{(1)} = \int \Pi^{(1)} \, \mathrm{d}x;$$

$$\Pi^{(2)} = f^{(2)}\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots \frac{\mathrm{d}^p y}{\mathrm{d}x^p}\right), \; \Delta^{(2)} = \int \Pi^{(2)} \, \mathrm{d}x;$$

$$\Pi^{(3)} = f^{(3)}\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots \frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}x^q}\right), \; \Delta^{(3)} = \int \Pi^{(3)} \mathrm{d}x;$$

u. s. w. u. s. w.

$$W = F\left\{\Delta, \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \ldots x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ky}{dx^k}\right\}$$

und
$$V = \int W\, dx,$$

wo $f, f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)} \ldots F$ beliebige algebraische oder transcendente Funktionen von den sich unter denselben befindenden Grössen bezeichnen, und die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt gedacht werden.

Abstrahirt man von der Variation von x, so ist, wie vorhin,
$$\delta V = \int \delta W x,$$
das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen.

Nun ist, wenn man allgemein $\left(\frac{dV}{d\left(\frac{d^ry}{dx^r}\right)}\right)$ mit $\overset{r}{Y}$ bezeichnet,

$$\delta W = \left(\frac{dW}{d\Delta}\right)\delta\Delta + \left(\frac{dW}{d\Delta_{(1)}}\right)\delta\Delta_{(1)} + \left(\frac{dW}{d\Delta^{(2)}}\right)\delta\Delta^{(2)} + \left(\frac{dW}{d\Delta^{(3)}}\right)\delta\Delta^{(3)} + \ldots$$
$$\ldots + Y\delta y + \overset{r}{\underset{}{\overset{1 \ldots k}{\Sigma}}} \overset{r}{Y}\frac{d^r\delta y}{dx^r} \quad (\S.\ 23.)$$

Da aber

$\delta\Delta = \int \delta\pi dx$, $\delta\Delta^{(1)} = \int \delta\pi^{(1)} dx$, $\delta\Delta^{(2)} = \int \delta\pi^{(2)} dx$, $\delta\Delta^{(3)} = \int \delta\pi^{(3)} dx$, u. s. w.

ist; so ist

$$\delta W = \left(\frac{dW}{d\Delta}\right)\int\delta\pi dx + \left(\frac{dW}{d\Delta^{(1)}}\right)\int\delta\pi^{(1)} dx + \left(\frac{dW}{d\Delta^{(2)}}\right)\int\delta\pi^{(2)} dx + \left(\frac{dW}{d\Delta^{(3)}}\right)\int\delta\pi^{(3)} dx + \ldots$$
$$\ldots + Y\delta y + \overset{r}{\overset{1 \ldots k}{\Sigma}} \overset{r}{Y}\frac{d^r\delta y}{dx^r},$$

und, diesen Werth von δW in δV substituirend,

$$\delta V = \int dx \left\{ \left(\frac{dW}{d\Delta}\right) \int \delta\pi dx \right\} + \int dx \left\{ \left(\frac{dW}{d\Delta^{(1)}}\right) \int \delta\pi^{(1)} dx \right\}$$

$$+ \int dx \left\{ \left(\frac{dW}{d\Delta}\right) \int \delta\pi^{(2)} dx \right\} + \int dx \left\{ \left(\frac{dW}{d\Delta_{(2)}}\right) \int \delta\pi_{(3)} dx \right\} + \ldots$$

$$\ldots + \int dx \left\{ Y \delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k}{\Sigma}} \overset{r}{Y} \frac{d^r \delta y}{dx^r} \right\},$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ genommen.

Es ist aber

$$\int dx \left\{ \left(\frac{dW}{d\Delta}\right) \int \delta\pi dx \right\} = \int \left(\frac{dW}{d\Delta}\right) dx \times \int \delta\pi dx - \int \left\{ \int \left(\frac{dW}{d\Delta}\right) dx \times \delta\pi dx \right\},$$

$$\int dx \left\{ \left(\frac{dW}{d\Delta^{(1)}}\right) \int \delta\pi^{(1)} dx \right\} = \int \left(\frac{dW}{d\Delta^{(1)}}\right) dx \times \int \delta\pi^{(1)} dx - \int \left\{ \int \left(\frac{dW}{d\Delta^{(1)}}\right) dx \times \delta\pi dx \right\},$$

u. s. w. u. s. w.

folglich, indem man diese Werthe substituirt,

$$\delta V = \int \left(\frac{dW}{d\Delta}\right) dx \times \int \delta\pi \, dx - \int \left\{ \int \left(\frac{dW}{d\Delta}\right) dx \times \delta\pi \, dx \right\}$$

$$+ \int \left(\frac{dW}{d\Delta^{(1)}}\right) dx \times \int \delta\pi^{(1)} dx - \int \left\{ \int \left(\frac{dW}{d\Delta^{(1)}}\right) dx \times \delta\pi^{(1)} dx \right\}$$

$$+ \int \left(\frac{dW}{d\Delta^{(2)}}\right) dx \times \int \delta\pi^{(2)} dx - \int \left\{ \int \left(\frac{dW}{d\Delta^{(2)}}\right) dx \times \delta\pi^{(2)} dx \right\}$$

$$+ \int \left(\frac{dW}{d\Delta^{(3)}}\right) dx \times \int \delta\pi^{(3)} dx - \int \left\{ \int \left(\frac{dW}{d\Delta^{(3)}}\right) dx \times \delta\pi^{(3)} dx \right\}$$

u. s. w. u. s. w.

$$+\int\left\{Y\delta y+\overset{\mathrm{r}}{\underset{\mathrm{I},..\mathrm{k}}{\Sigma}}\overset{\mathrm{r}}{Y}\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}\delta y}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}}\right\},$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Bezeichnet man daher innerhalb dieser Grenzen

$\int\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Delta}\right)\mathrm{d}x$ mit I, $\int\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Delta^{(1)}}\right)\mathrm{d}x$ mit $I^{(1)}$, $\int\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Delta^{(2)}}\right)\mathrm{d}x$ mit $I^{(2)}$, u. s. w.;

und überlegt, dass, unter dieser Voraussetzung,

$I\int\delta\pi\mathrm{d}x=\int I\delta\pi\mathrm{d}x$, $I^{(1)}\int\delta\pi^{(1)}\mathrm{d}x=\int I^{(1)}\delta\pi^{(1)}\mathrm{d}x$, $I^{(2)}\int\delta\pi^{(2)}\mathrm{d}x=\int I^{(2)}\delta\pi^{(2)}\mathrm{d}x$

u. s. w. ist; so erlangt man

$$\delta V=\int\left\{I-\int\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Delta}\right)\mathrm{d}x\right\}\delta\pi\mathrm{d}x+\int\left\{I^{(1)}-\int\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Delta^{(1)}}\right)\mathrm{d}x\right\}\delta\pi^{(1)}\mathrm{d}x$$

$$+\int\left\{I^{(2)}-\int\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Delta^{(2)}}\right)\mathrm{d}x\right\}\delta\pi^{(2)}\mathrm{d}x+\int\left\{I^{(3)}-\int\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Delta^{(3)}}\right)\mathrm{d}x\right\}\delta\pi^{(3)}\mathrm{d}x$$

u. s. w. u. s. w.

$$+\int\mathrm{d}x\left\{Y\delta y+\overset{\mathrm{r}}{\underset{\mathrm{I},..\mathrm{k}}{\Sigma}}Y\frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}\delta y}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}}\right\},$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Da aber

$$\pi = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \ldots \frac{\mathrm{d}^my}{\mathrm{d}x^m}\right)$$

ist, so ist, indem man ganz allgemein

$$\left(\frac{d\Pi}{d\left(\frac{d^r y}{dx^r}\right)}\right) \text{ mit } \overset{r}{\Upsilon}$$

bezeichnet,

$$\delta\Pi = \Upsilon\delta y + \overset{r}{\overset{1\ldots m}{\Sigma}} \overset{r}{\Upsilon} \frac{d^r\delta y}{dx^r};$$

und, unter einer analogen Bezeichnung,

$$\delta\Pi^{(1)} = \Upsilon^{(1)}\delta y + \overset{r}{\overset{1\ldots n}{\Sigma}} \overset{r}{\Upsilon}{}^{(1)} \frac{d^r\delta y}{dx^r},$$

$$\delta\Pi^{(2)} = \Upsilon^{(2)}\delta y + \overset{r}{\overset{1\ldots p}{\Sigma}} \overset{r}{\Upsilon}{}^{(2)} \frac{d^r\delta y}{dx^r},$$

$$\delta\Pi^{(3)} = \Upsilon^{(3)}\delta y + \overset{r}{\overset{1\ldots q}{\Sigma}} \overset{r}{\Upsilon}{}^{(3)} \frac{d^r\delta y}{dx^r},$$

u. s. w. u. s. w.

Substituirt man diese Werthe, so kommt

$$\begin{aligned}\delta V = &\int\left\{I - \int\left(\frac{dW}{d\Delta}\right)dx\right\}\times\left\{\Upsilon\delta y + \overset{r}{\overset{1\ldots m}{\Sigma}}\overset{r}{\Upsilon}\frac{d^r\delta y}{dx^r}\right\}dx\\
&+\int\left\{I^{(1)} - \int\left(\frac{dW}{d\Delta^{(1)}}\right)dx\right\}\times\left\{\Upsilon^{(1)}\delta y + \overset{r}{\overset{1\ldots n}{\Sigma}}\overset{r}{\Upsilon}{}^{(1)}\frac{d^r\delta y}{dx^r}\right\}dx\\
&+\int\left\{I^{(2)} - \int\left(\frac{dW}{d\Delta^{(2)}}\right)dx\right\}\times\left\{\Upsilon^{(2)}\delta y + \overset{r}{\overset{1\ldots p}{\Sigma}}\overset{r}{\Upsilon}{}^{(2)}\frac{d^r\delta y}{dx^r}\right\}dx\\
&+\int\left\{I^{(3)} - \int\left(\frac{dW}{d\Delta^{(3)}}\right)dx\right\}\times\left\{\Upsilon^{(3)}\delta y + \overset{r}{\overset{1\ldots q}{\Sigma}}\overset{r}{\Upsilon}{}^{(3)}\frac{d^r\delta y}{dx^r}\right\}dx\end{aligned}$$

u. s. w.

$$+\int\left\{Y\delta y+\overset{1\ldots k}{\Sigma}\overset{r}{Y}\frac{d^r\delta y}{dx^r}\right\}dx,$$

die Integrale von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt.

Setzt man nun, der Kürze wegen,

$$I-\int\left(\frac{dW}{d\Delta}\right)dx=\xi,\ I^{(1)}-\int\left(\frac{dW}{d\Delta^{(1)}}\right)dx=\xi^{(1)},$$

$$I^{(2)}-\int\left(\frac{dW}{d\Delta^{(2)}}\right)dx=\xi^{(2)},I^{(3)}-\int\left(\frac{dW}{d\Delta^{(3)}}\right)dx=\xi^{(3)},$$

u. s. w.

wie auch

$$\xi\Upsilon+\xi^{(1)}\Upsilon^{(1)}+\xi^{(2)}\Upsilon^{(2)}+\xi^{(3)}\Upsilon^{(3)}+\ldots Y=\mathrm{Y},$$

$$\xi\overset{1}{\Upsilon}+\xi^{(1)}\overset{1}{\Upsilon}{}^{(1)}+\xi^{(2)}\overset{1}{\Upsilon}{}^{(2)}+\xi^{(3)}\overset{1}{\Upsilon}{}^{(3)}+\ldots\overset{1}{Y}=\overset{1}{\mathrm{Y}},$$

$$\xi\overset{2}{\Upsilon}+\xi^{(1)}\overset{2}{\Upsilon}{}^{(1)}+\xi^{(2)}\overset{2}{\Upsilon}{}^{(2)}+\xi^{(3)}\overset{2}{\Upsilon}{}^{(3)}+\ldots\overset{2}{Y}=\overset{2}{\mathrm{Y}},$$

allgemein

$$\xi\overset{r}{\Upsilon}+\xi^{(1)}\overset{r}{\Upsilon}{}^{(1)}+\xi^{(2)}\overset{r}{\Upsilon}{}^{(2)}+\xi^{(3)}\overset{r}{\Upsilon}{}^{(3)}+\ldots\overset{r}{Y}=\overset{r}{\mathrm{Y}},$$

so erlangt man

$$\delta V=\int\left\{\mathrm{Y}\delta y+\overset{1\ldots(\varrho)}{\Sigma}\overset{r}{\mathrm{Y}}\frac{d^r\delta y}{dx^r}\right\}dx,$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ genommen, und unter (ϱ), um keine Glieder zu verfehlen, die grösste der Zahlen k, m, n, p, q verstanden.

Nach der im vorigen §. gemachten Bemerkung ist es einleuchtend, dass, wenn W, π, $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$, $\pi^{(3)}\ldots$ zugleich Funktionen von

z, t, n... und deren Differenzial-Coefficienten wären, alsdann hinsichtlich jeder dieser Grössen ein, dem vorigen vollkommen analoger Ausdruck zu jenem für δV hinzutreten würde; wie auch, dass die Variation von x noch das Glied $W\delta x$ verschafft. Transformirt man nun den obigen Ausdruck nach der in §. 23. dargestellten Methode, und nimmt den Werth desselben innerhalb der bezeichneten Grenzen; so erlangt man unter einer, der dortigen ähnlichen Bezeichnung, und mit Berücksichtigung der Variation von x

$$\delta V = \int \delta y \left\{ \mathrm{Y} + \overset{\mathrm{r}}{\underset{1\ldots(\varrho)}{}} \Sigma \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}} \overset{\mathrm{r}}{\mathrm{Y}}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} \right\} \mathrm{d}x$$

$$+ \delta y_{(2)} \overset{\mathrm{r}}{\underset{1\ldots(\varrho)}{}} \Sigma \mp \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}-1} \overset{\mathrm{r}}{\mathrm{Y}}_{(2)}}{\mathrm{d}b^{\mathrm{r}-1}} + \frac{\mathrm{d}\delta y_{(2)}}{\mathrm{d}b} \overset{\mathrm{r}}{\underset{2\ldots(\varrho)}{}} \Sigma \mp \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}-2} \overset{\mathrm{r}}{\mathrm{Y}}_{(2)}}{\mathrm{d}b^{\mathrm{r}-2}} + \ldots \mp \frac{\mathrm{d}^{(\varrho)-1} \delta y_{(2)}}{\mathrm{d}b^{(\varrho)-1}} \overset{(\varrho)}{\mathrm{Y}}_{(2)}$$

$$- \delta y_{(1)} \overset{\mathrm{r}}{\underset{1\ldots(\varrho)}{}} \Sigma \mp \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}-1} \overset{\mathrm{r}}{\mathrm{Y}}_{(1)}}{\mathrm{d}a^{\mathrm{r}-1}} - \frac{\mathrm{d}\delta y_{(1)}}{\mathrm{d}a} \overset{\mathrm{r}}{\underset{2\ldots(\varrho)}{}} \Sigma \mp \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}-2} \overset{\mathrm{r}}{\mathrm{Y}}_{(1)}}{\mathrm{d}a^{\mathrm{r}-2}} - \ldots \pm \frac{\mathrm{d}^{(\varrho)-1} \delta y_{(1)}}{\mathrm{d}a^{(\varrho)-1}} \overset{(\varrho)}{\mathrm{Y}}_{(1)}$$

$$+ W_{(2)} \delta b - W_{(1)} \delta a$$

wo das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, und die obern Zeichen genommen werden müssen, wenn r eine gerade, die untern hingegen, wenn r eine ungerade Zahl ist.

Ist V bloss eine Funktion von π, x, y, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$, ...; so ist

$$\Upsilon^{(1)} = o, \; \Upsilon^{(2)} = o, \; \Upsilon^{(3)} = o, \text{ u. s. w.}$$

mithin
$$\overset{\mathrm{r}}{\mathrm{Y}} = \xi \overset{\mathrm{r}}{\Upsilon} + \overset{\mathrm{r}}{Y}.$$

Ist V zugleich eine Funktion von $\pi^{(1)}$; so ist

$$\overset{\mathrm{r}}{\mathrm{Y}} = \xi \overset{\mathrm{r}}{\Upsilon} + \xi^{(1)} \overset{\mathrm{r}}{\Upsilon}{}^{(1)} + \overset{\mathrm{r}}{Y}.$$

Ist V überdiess eine Funktion von $\pi^{(1)}$; so ist

$$\overset{r}{Y} = \xi\overset{r}{\Upsilon} + \xi^{(1)}\overset{r}{\Upsilon}{}^{(1)} + \xi^{(2)}\overset{r}{\Upsilon}{}^{(2)} + \overset{r}{Y}.$$

Hieraus geht hervor, auf welche Weise von dem einfachern Falle zu den zusammengesetztern allmählig fortgeschritten werden kann.

Uebrigens ist es einleuchtend, dass die im vorigen §. hinsichtlich der mit dem Integrations-Zeichen behafteten, und der davon befreiten Theile gemachten Bemerkungen auch hier ihre unbedingte Anwendung finden.

§. 26.

Auch in dem Falle, wo die Grössen π, $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$, $\pi^{(3)}$ u. s. w. selbst noch anderweitige Integral-Ausdrücke enthalten, lässt sich die Variation der ersten Ordnung von V auf die Form des §'s 23. zurückführen.

Es sei

$$W = F\left\{\pi, x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ky}{dx^k}\right\},$$

$$\pi = \int W^{(1)}dx, \quad W^{(1)} = F^{(1)}\left\{\pi^{(1)}, x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{k^{(1)}}y}{dx^{k^{(1)}}}\right\},$$

$$\pi^{(1)} = \int W^{(2)}dx, \quad W^{(2)} = F^{(2)}\left\{\pi^{(2)}, x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{k^{(2)}}y}{dx^{k^{(2)}}}\right\},$$

$$\pi^{(2)} = \int W^{(3)}dx, \quad W^{(3)} = F^{(3)}\left\{\pi^{(3)}, x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{k^{(3)}}y}{dx^{k^{(3)}}}\right\},$$

u. s. w.

$$\pi^{(n-1)} = \int W^{(n)}dx, \quad W^{(n)} = F^{(n)}\left\{x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{k^{(n)}}y}{dx^{k^{(n)}}}\right\},$$

und

$$V = \int W \mathrm{d}x,$$

wo die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt gedacht werden.

Es ist, wie vorhin,

$$\delta V = \int \delta W \mathrm{d}x,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen; und, da

$$W = F\left\{\pi,\, x,\, y,\, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2},\, \ldots \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}\right\},$$

$$\delta W = \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\pi}\right)\delta\pi + Y\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k}{\Sigma}}\, \overset{r}{Y}\frac{\mathrm{d}^r \delta y}{\mathrm{d}x^r};$$

mithin

$$\delta V = \int \mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\pi}\right)\delta\pi + \int \mathrm{d}x\left\{Y\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k}{\Sigma}}\, \overset{r}{Y}\frac{\mathrm{d}^r \delta y}{\mathrm{d}x^r}\right\},$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Nun ist, in Folge der gegebenen Gleichungen,

$$\delta\pi = \int \delta W^{(1)} \mathrm{d}x,\quad \delta W^{(1)} = \left(\frac{\mathrm{d}W^{(1)}}{\mathrm{d}\pi^{(1)}}\right)\delta\pi^{(1)} + Y^{(1)}\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k^{(1)}}{\Sigma}}\, \overset{r}{Y}{}^{(1)}\frac{\mathrm{d}^r \delta y}{\mathrm{d}x^r}$$

$$\delta\pi^{(1)} = \int \delta W^{(2)} \mathrm{d}x,\quad \delta W^{(2)} = \left(\frac{\mathrm{d}W^{(2)}}{\mathrm{d}\pi^{(2)}}\right)\delta\pi^{(2)} + Y^{(2)}\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k^{(2)}}{\Sigma}}\, \overset{r}{Y}{}^{(2)}\frac{\mathrm{d}^r \delta y}{\mathrm{d}x^r}$$

$$\delta\pi^{(2)} = \int \delta W^{(3)} \mathrm{d}x,\quad \delta W^{(3)} = \left(\frac{\mathrm{d}W^{(3)}}{\mathrm{d}\pi^{(3)}}\right)\delta\pi^{(3)} + Y^{(3)}\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k^{(3)}}{\Sigma}}\, \overset{r}{Y}{}^{(3)}\frac{\mathrm{d}^r \delta y}{\mathrm{d}x^r}$$

u. s. w. u. s. w.

$$\delta\Pi^{(n-1)} = \int \delta W^{(n)}\,dx,\ \delta W^{(n)} = Y_{(n)}\,\delta y + \sum_{1\ldots k^{(n)}}^{r} Y_{(n)}^{r} \frac{d^r \delta y}{dx^r}.$$

Eliminirt man vermittelst dieser Gleichungen aus δV die Grössen $\delta\Pi$, $\delta W^{(1)}$, $\delta\Pi^{(1)}$, $\delta W^{(2)}$ u. s. w.; so erlangt man

$$\delta V = \int dx \left\{ Y\delta y + \sum_{1\ldots k}^{r} Y^{r} \frac{d^r \delta y}{dx^r} \right\}.$$

$$+ \int \left(\frac{dW}{d\Pi}\right) dx \int dx \left\{ Y_{(1)}\,\delta y + \sum_{1\ldots k^{(1)}}^{r} Y_{(1)}^{r} \frac{d^r \delta y}{dx^r} \right\}$$

$$+ \int \left(\frac{dW}{d\Pi}\right) dx \int \left(\frac{dW^{(1)}}{d\Pi^{(1)}}\right) dx \int dx \left\{ Y_{(2)}\,\delta y + \sum_{1\ldots k^{(2)}}^{r} Y_{(2)}^{r} \frac{d^r \delta y}{dx^r} \right\}$$

$$+ \int \left(\frac{dW}{d\Pi}\right) dx \int \left(\frac{dW^{(1)}}{d\Pi^{(1)}}\right) dx \int \left(\frac{dW^{(2)}}{d\Pi^{(2)}}\right) dx \int dx \left\{ Y_{(3)}\,\delta y + \sum_{1\ldots k^{(3)}}^{r} Y_{(3)}^{r} \frac{d^r \delta y}{dx^r} \right\}$$

u. s. w.

$$+ \int \left(\frac{dW}{d\Pi}\right) dx \int \left(\frac{dW^{(1)}}{d\Pi^{(1)}}\right) dx \ldots \int \left(\frac{dW^{(n-1)}}{d\Pi^{(n-1)}}\right) dx \int dx \left\{ Y_{(n)}\,\delta y + \sum_{1\ldots k^{(n)}}^{r} Y_{(n)}^{r} \frac{d^r \delta y}{dx^r} \right\},$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, wollen wir die Form

$$\int L dx \int L^{(1)} dx \int L^{(2)} dx \int L^{(3)} dx \ldots \int L^{(\varrho)} dx,$$

von $x = a$ bis $x = b$ genommen, etwas näher betrachten.

Bezeichnen wir, der Kürze halber, ganz allgemein

$$\int L^{(\mu)} dx \int L^{(\mu+1)} dx \int L^{(\mu+2)} dx \int L^{(\mu+3)} dx \ldots \int L^{(\varrho)} dx \text{ mit } \Omega^{(\mu)}\ (I),$$

so ist offenbar

$$\Omega^{(\mu)} = \int L^{(\mu)} dx\, \Omega^{(\mu+1)}, \ (II)$$

mithin
$$d\Omega^{(\mu)} = L^{(\mu)} dx\, \Omega^{(\mu+1)}.$$

Da nun, unter dieser Bezeichnung, die vorgesetzte Grösse in Ω übergeht; so hat man

$$\Omega = \int L dx\, \Omega^{(1)}$$
$$= \int L dx \times \Omega^{(1)} - \int (\int L dx \times d\Omega^{(1)})$$

Bezeichnet man daher $\int L dx$, von $x = a$ bis $x = b$, mit, I, so hat man

$$\Omega = I\Omega^{(1)} - \int (\int L dx \times d\Omega^{(1)})$$

Es ist aber

$$\Omega^{(1)} = \int L^{(1)} dx\, \Omega^{(2)}, \text{ nach } (II),$$

folglich

$$d\Omega^{(1)} = L^{(1)} dx\, \Omega^{(2)};$$

wie auch, da I eine constante Zahl ist,

$$I \cdot \int L^{(1)} dx\, \Omega^{(2)} = \int I L^{(1)} dx\, \Omega^{(2)},$$

mithin

$$\Omega = \int (I - \int L dx)\, L^{(1)} dx\, \Omega^{(2)} = \int P\, \Omega^{(2)}$$

oder

$$\Omega = \int (I - \int L dx)\, L^{(1)} dx \times \Omega^{(2)} - \int \left\{ \int (I - \int L dx) L^{(1)} dx \times d\Omega^{(2)} \right\}.$$

Setzt man daher $\int (I - \int L dx) L^{(1)} dx$, von $x = a$ bis $x = b$, gleich

gleich $I^{(1)}$ so kommt

$$\Omega = I^{(1)}\Omega^{(2)} - \int\left\{\int(I - \int L\mathrm{d}x)L^{(1)}\mathrm{d}x \times \mathrm{d}\Omega^{(2)}\right\}.$$

Es ist aber

$$\Omega^{(2)} = \int L^{(2)}\mathrm{d}x\,\Omega^{(3)}, \text{ nach } (II),$$

folglich

$$\mathrm{d}\Omega^{(2)} = L^{(2)}\mathrm{d}x\,\Omega^{(3)}$$

wie auch

$$I^{(1)}\int L^{(2)}\mathrm{d}x\,\Omega^{(3)} = \int I^{(1)}L^{(2)}\mathrm{d}x\,\Omega^{(3)};$$

mithin

$$\Omega = \int\left\{I^{(1)} - \int\{I - \int L\mathrm{d}x\}\,L^{(1)}\mathrm{d}x\right\}\,L^{(2)}\mathrm{d}x\,\Omega^{(3)} = \int P^{(1)}\Omega^{(3)},$$

oder

$$\Omega = \int\left\{I^{(1)} - \int\{I - \int L\mathrm{d}x\}\,L^{(1)}\mathrm{d}x\right\}L^{(2)}\mathrm{d}x\right\} \times \Omega^{(3)}$$

$$- \int\left\{\int\left\{I^{(1)} - \int\{I - \int L\mathrm{d}x\}L^{(1)}\mathrm{d}x\right\}L^{(2)}\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\Omega^{(1)}$$

Setzt man daher

$$\int\left\{I^{(1)} - \int\{I - \int L\mathrm{d}x\}\,L^{(1)}\mathrm{d}x\right\}L^{(2)}\mathrm{d}x \text{ von } x = a \text{ bis } x = b \text{ gleich } I^{(2)},$$

so erhält man

$$\Omega = I^{(2)}\Omega^{(3)} - \int\left\{\int\left\{I^{(1)} - \int\{I - \int L\mathrm{d}x\}\,L^{(1)}\mathrm{d}x\right\}L^{(2)}\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\Omega^{(3)}$$

Da aber

$$\Omega^{(3)} = \int L^{(3)}\mathrm{d}x\,\Omega^{(4)}, \text{ nach } (II)$$

mithin

$$d\Omega^{(3)} = L^{(3)} dx\, \Omega^{(4)},$$

und
$$I^{(2)} \int L^{3)} dx\, \Omega^{(4)} = \int I^{(2)} L^{(3)} dx\, \Omega^{(4)}$$

ist: so ist

$$\Omega = \int \left\{ I^{(2)} - \int \left\{ I^{(1)} - \int \left\{ I - \int L dx \right\} L^{(1)} dx \right\} L^{(2)} dx \right\} L^{(3)} dx \Omega^{(4)} = \int P^{(2)} \Omega^{(4)}$$

u. s. w.

Es sei also ganz allgemein

$$\Omega = \int P^{(\lambda)} \Omega^{(\lambda+2)},$$

oder

$$\Omega = \int P^{(\lambda)} \times \Omega^{(\lambda+2)} - \int \left\{ \int P^{(\lambda)} \times d\Omega^{(\lambda+2)} \right\}.$$

Setzt man nun

$\int P^{(\lambda)}$ von $x = a$ bis $x = b$ gleich $I^{(\lambda+1)}$,

so hat man

$$\Omega = I^{(\lambda+1)} \Omega^{(\lambda+2)} - \int \left\{ \int P^{(\lambda)} \times d\Omega^{(\lambda+)} \right\}$$

Aber es ist

$$\Omega^{(\lambda+2)} = \int L^{(\lambda+2)} dx\, \Omega^{(\lambda+3)}, \text{ nach } II,$$

folglich

$$d\Omega^{(\lambda+2)} = L^{(\lambda+2)} dx\, \Omega^{(\lambda+3)},$$

wie auch

$$I^{(\lambda+1)} \int L^{(\lambda+2)} dx\, \Omega^{(\lambda+3)} = \int I^{(\lambda+1)} L^{(\lambda+2)} dx\, \Omega^{(\lambda+3)};$$

mithin, indem man diese Werthe substituirt,

$$\Omega = \int \left\{ I^{(\lambda+1)} - \int P^{(\lambda)} \right\} L^{(\lambda+2)} \mathrm{d}x \, \Omega^{(\lambda+3)}.$$

Da nun

$$\Omega^{(\varrho)} = \int L^{(\varrho)} \mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}\Omega^{(\varrho)} = L^{(\varrho)} \mathrm{d}x,$$

$$\Omega^{(\varrho+1)} = 1$$

ist: so hat man, indem man $(\lambda+2) = \varrho$ setzt,

$$\Omega = \int \left\{ I^{(\varrho-1)} - \int P^{(\varrho+2)} \right\} L^{(\varrho)} \mathrm{d}x \quad = \int P^{(\varrho-1)} L^{(\varrho)} \mathrm{d}x.$$

Hieraus geht hervor, dass jeder Ausdruck von der Form

$$\int L \mathrm{d}x \int L^{(1)} \mathrm{d}x \int L^{(2)} \mathrm{d}x \int L^{(3)} \mathrm{d}x \ldots \int L^{(\varrho)} \mathrm{d}x$$

von $x = a$ bis $x = b$ auf die Form

$$\int P^{(\varrho-1)} L^{(\varrho)} \mathrm{d}x$$

zurück geführt werden kann, wo

$$P^{(\varrho-1)} = \int \left\{ I^{(\varrho-1)} - \int \left\{ I^{(\varrho-2)} - \int \left\{ I^{(\varrho-3)} - \int \left\{ I^{(\varrho-4)} \ldots \right.\right.\right.\right.$$

$$\ldots \int \left\{ I - \int L \mathrm{d}x \right\} L^{(1)} \mathrm{d}x \left.\right\} L^{(2)} \mathrm{d}x \left.\right\} L^{(3)} \mathrm{d}x \ldots \left.\right\} L^{(\varrho)} \mathrm{d}x$$

ist.

Wenden wir dieses Resultat auf den obigen, für δV entwickelten, Ausdruck an, indem wir an die Stelle von L, $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, ... die

Grössen $\left(\frac{dW}{d\Pi}\right)$, $\left(\frac{dW^{(1)}}{d\Pi^{(1)}}\right)$, $\left(\frac{dW^{(2)}}{d\Pi^{(2)}}\right)$, ... und an die Stelle von $L^{(\varrho)}$ die Grösse $\left\{Y^{(\varrho)}\,\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k^{(\varrho)}}{\Sigma}} \overset{r}{Y}{}^{(\varrho)} \frac{d^r\,\delta y}{dx^r}\right\}$ treten lassen: so erlangen wir, unter einer analogen Bezeichnung,

$$\delta V = \int \left\{Y\,\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k}{\Sigma}} \overset{r}{Y} \frac{d^r\,\delta y}{dx^r}\right\} dx$$

$$+\int P \left\{Y^{(1)}\,\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k^{(1)}}{\Sigma}} \overset{r}{Y}{}^{(1)} \frac{d^r\,\delta y}{dx^r}\right\} dx$$

$$+\int P^{(1)} \left\{Y^{(2)}\,\delta y + \overset{1}{\underset{1\ldots k^{(2)}}{\Sigma}} \overset{r}{Y}{}^{(2)} \frac{d^r\,\delta y}{dx^r}\right\} dx$$

$$+\int P^{(2)} \left\{Y^{(3)}\,\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k^{(3)}}{\Sigma}} Y^{(3)} \frac{d^r\,\delta y}{dx^r}\right\} dx$$

u. s. w.

$$+\int P^{(n-1)} \left\{Y^{(n)}\,\delta y + \overset{r}{\underset{1\ldots k^{(n)}}{\Sigma}} \overset{r}{Y}{}^{(n)} \frac{d^r\,\delta y}{dx^r}\right\} dx,$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Bezeichnet man daher

$Y + P\,Y^{(1)} + P^{(1)}\,Y^{(2)} + P^{(2)}\,Y^{(3)} + P^{(3)}\,Y^{(4)} + \ldots P^{(n-1)}\,Y^{(n)}$ mit Y,

allgemein

$\overset{r}{Y} + P\,\overset{r}{Y}{}^{(1)} + P^{(1)}\,\overset{r}{Y}{}^{(2)} + P^{(2)}\,\overset{r}{Y}{}^{(3)} + P^{(3)}\,\overset{r}{Y}{}^{(4)} + \ldots P^{(n-1)}\,\overset{r}{Y}{}^{(n)}$ mit $\overset{r}{\mathrm{Y}}$:

$$\delta V = \int \left\{ Y\delta y + {}^{1\ldots(\lambda)}\overset{r}{\Sigma}\,\overset{r}{Y}\,\frac{d^r\ \delta y}{dx^r} \right\} dx,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen, und unter (λ), um keine Glieder zu verfehlen, die grösste von den Zahlen k, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $k^{(3)}$, ... $k^{(n)}$ verstanden. Es ist einleuchtend, dass, im Falle die Grössen W, $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, . . . zugleich Funktionen von den relativ-unabhängigen Grössen z, t, u . . . und deren Differenzial-Coefficienten wären, alsdann zu dem vorigen Ausdruck für δV hinsichtlich jeder diese Grössen ein ihm vollkommen analoger Ausdruck hinzukommen würde; wie auch, dass die Berücksichtigung der Variation der absolut-unabhängigen Grösse x noch das Glied $W\delta x$ liefert.

Transformirt man nun den obigen Ausdruck nach der vorigen Methode, und nimmt den Werth desselben innerhalb der bezeichneten Grenzen: so erlangt man mit Rücksicht auf die Variation von x

$$V = \int \left\{ Y\delta y + {}^{1\ldots(\lambda)}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r\ \delta\overset{r}{Y}}{dx^r} \right\} dx$$

$$+\delta y_{(2)}\,{}^{1\ldots(\lambda)}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-1}} + \frac{d\delta y_{(2)}}{db}\,{}^{2\ldots(\lambda)}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}} + \ldots \mp \frac{d^{(\lambda)-1}\delta y_{(2)}}{db^{(\lambda)-1}}\,\overset{(\lambda)}{Y}_{(2)}$$

$$-\delta y_{(1)}\,{}^{1\ldots(\lambda)}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-1}} - \frac{d\delta y_{(1)}}{da}\,{}^{2\ldots(\lambda)}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-2}} - \ldots \pm \frac{d^{(\lambda)-1}\delta y_{(1)}}{da^{(\lambda)-1}}\,\overset{(\lambda)}{Y}_{(1)}$$

$$+ W_{(2)}\,\delta b - W_{(1)}\,\delta a,$$

wo das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, und die obern Zeichen genommen werden müssen, wenn r eine gerade, die untern hingegen, wenn r eine ungerade Zahl ist.

§. 27.

Ist V vermittelst einer Differenzial-Gleichung gegeben, so ist die Zurückführung der Variation der ersten Ordnung auf die vorige Form gleichfalls möglich.

Es sei

$$F\left\{V,\ \frac{dV}{dx},\ \frac{d^2V}{dx^2},\ldots\frac{d^\mu V}{dx^\mu},\ x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots\frac{d^m y}{dx^m};\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ldots\frac{d^n z}{dx^n},\ldots\right\}=o$$

die Gleichung, aus welcher δV, für V von $x = a$ bis $x = b$, bestimmt werden soll, und die wir, der Kürze halber, durch

$$W = o$$

darstellen wollen. Variirt man diese Gleichung nach Vorschrift des ersten Kapitels, so kommt, indem man die vorige Bezeichnung beibehält, und überdiess

$$\left(\frac{dW}{dV}\right)=\Psi,\ \left(\frac{dW}{d\left(\frac{dV}{dx}\right)}\right)=\overset{1}{\Psi},\ \left(\frac{dW}{d\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)}\right)=\overset{2}{\Psi},\ \ldots\left(\frac{dW}{d\left(\frac{d^\mu V}{dx^\mu}\right)}\right)=\overset{\mu}{\Psi}$$

setzt,

$$\left.\begin{array}{l} \Psi\delta V+\overset{\mathrm{r}}{\underset{}{\overset{1\ldots\mu}{\Sigma}}}\overset{\mathrm{r}}{\Psi}\dfrac{d^{\mathrm{r}}\delta V}{dx^{\mathrm{r}}} \\[2ex] +Y\delta y+\overset{\mathrm{r}}{\overset{1\ldots\mathrm{m}}{\Sigma}}\overset{\mathrm{r}}{Y}\dfrac{d^{\mathrm{r}}\delta y}{dx^{\mathrm{r}}} \\[2ex] +Z\delta z+\overset{\mathrm{r}}{\overset{1\ldots\mathrm{n}}{\Sigma}}\overset{\mathrm{r}}{Z}\dfrac{d^{\mathrm{r}}\delta z}{dx^{\mathrm{r}}} \end{array}\right\}=o,$$

u. s. w.

welches in Beziehung auf δV eine Differenzial-Gleichung von der μ^{ten} Ordnung abgiebt. Multiplicirt man diese mit Δ und integrirt, so kommt

$$\int\left\{\Delta\Psi\,\delta V+{}^{\overset{r}{1\ldots\mu}}\Sigma\,{}^{r}\Delta\Psi\frac{d^r\delta V}{dx^r}\right\}dx$$

$$+\int\left\{\Delta Y\,\delta y+{}^{\overset{r}{1\ldots m}}\Sigma\,\Delta\,{}^{r}Y\frac{d^r\delta V}{dx^r}\right\}dx$$

$$+\int\left\{\Delta Z\,\delta z+{}^{\overset{r}{1\ldots n}}\Sigma\,\Delta\,{}^{r}Z\frac{d^r\delta z}{dx^r}\right\}dx$$

u. s. w.

$$= C,$$

oder, wenn man

$$\Delta Y\,\delta y+{}^{\overset{r}{1\ldots m}}\Sigma\,\Delta\,{}^{r}Y\frac{d^r\delta y}{dx^r}$$

$$+\Delta Z\,\delta z+{}^{\overset{r}{1\ldots n}}\Sigma\,\Delta\,{}^{r}Y\frac{d^r\delta z}{dx^r}$$

u. s. w.

durch χ angedeutet,

$$\int\left\{\Delta\Psi\,\delta V+{}^{\overset{r}{1\ldots\mu}}\Sigma\,{}^{r}\Delta\Psi\frac{d^r\delta V}{dx^r}\right\}dx+\int\chi\,dx=C,$$

wo C eine beliebige Constante bezeichnet.

Wendet man hier die oben dargestellte Transformation an, so kommt

$$\int \delta V \left\{ \Delta \Psi + \overset{r}{\underset{1\ldots\mu}{}}\Sigma \pm \frac{d^r \Delta \overset{r}{\Psi}}{dx^r} \right\} dx + \overset{r}{\underset{1\ldots\mu}{}}\Sigma \overset{\lambda}{\underset{1\ldots\mu}{}} S \mp \frac{d^{r-1} \Delta \overset{r}{\Psi}}{dx^{r-1}} \frac{d^{r-\lambda} \delta V}{dx^{r-\lambda}} + \int \chi dx = C.$$

Bestimmt man nun Δ dergestalt, dass

$$\Delta \Psi + \overset{r}{\underset{1\ldots\mu}{}}\Sigma \pm \frac{d^r \Delta \overset{r}{\Psi}}{dx^r} = o$$

sei, welches in Beziehung auf Δ eine Differenzial-Gleichung von der μ^{ten} Ordnung abgiebt: so hat man

$$\overset{r}{\underset{1\ldots\mu}{}}\Sigma \overset{\lambda}{\underset{1\ldots\mu}{}} S \mp \frac{d^{r-1} \Delta \overset{r}{\Psi}}{dx^{r-1}} \frac{d^{r-\lambda} \delta V}{dx^{r-\lambda}} + \int \chi dx = C,$$

oder, den ersten Theil dieses Ausdruckes nach den Ordnungszahlen der Differenzial-Coefficienten von δV darstellend,

$$\delta V \overset{r}{\underset{1\ldots\mu}{}}\Sigma \mp \frac{d^{r-1} \Delta \overset{r}{\Psi}}{dx^{r-1}} + \frac{d \delta V}{dx} \overset{r}{\underset{2\ldots\mu}{}}\Sigma \mp \frac{d^{r-2} \Delta \overset{r}{\Psi}}{dx^{r-2}} + \frac{d^2 \delta V}{dx^2} \overset{r}{\underset{3\ldots\mu}{}}\Sigma \mp \frac{d^{r-3} \Delta \overset{r}{\Psi}}{dx^{r-3}}$$

$$+ \frac{d^3 \delta V}{dx^3} \overset{r}{\underset{4\ldots\mu}{}}\Sigma \mp \frac{d^{r-4} \Delta \overset{r}{\Psi}}{dx^{r-4}} + \ldots \frac{d^{\mu-1} \delta V}{dx^{\mu-1}} \Delta \overset{\mu}{\Psi} + \int \chi dx = C.$$

Da nun ferner die Variation von V von $x = a$ bis $x = b$ verlangt wird, so wird die Constante C dergestalt bestimmt werden müssen, dass für $x = a$ $\delta V = o$ sei. Substituirt man daher diesen Werth von x in der obigen Gleichung, so kommt, indem man, für $x = a$, $\int \chi\, dx$ mit $\Gamma_{(1)}$ bezeichnet,

$$C = \frac{d\delta V_{(1)}}{da}{}^{2\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-2}\Delta_{(1)}\overset{r}{\Psi}_{(1)}}{dx^{r-2}} + \frac{d^2\delta V_{(1)}}{da^2}{}^{3\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-3}\Delta_{(1)}\overset{r}{\Psi}_{(1)}}{da^{r-3}} + \frac{d^3\delta V_{(1)}}{da^3}{}^{4\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-4}\Delta_{(1)}\overset{r}{\Psi}_{(1)}}{da^{r-4}}$$

$$+\frac{d^4\delta V_{(1)}}{da^4}{}^{5\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-5}\Delta_{(1)}\overset{r}{\Psi}_{(1)}}{da^{r-5}} + \ldots \mp \frac{d^{\mu-1}\delta V_{(1)}}{da^{\mu-1}}\Delta_{(1)}\overset{\mu}{\Psi}_{(1)} + \Gamma_{(1)}.$$

Weil aber auch, damit der Werth von V, für bestimmte Werthe von $x, y, z\ldots$, vermittelst der gegebenen Differenzial-Gleichung völlig bestimmt sei, $\frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \frac{d^3V}{dx^3}, \ldots \frac{d^{\mu-1}V}{dx^{\mu-1}}$ für bestimmte Werthe von x gegeben seyn müssen; so werden diese für $x = a$ als bekannt angesehen werden dürfen. Unter dieser Voraussetzung hat man

$$\delta\,\frac{dV_{(1)}}{da} = o,\ \delta\,\frac{d^2V_{(1)}}{da^2} = o,\ \delta\,\frac{d^3V_{(1)}}{da^3} = o,\ \ldots\ \delta\,\frac{d^{\mu-1}V_{(1)}}{da^{\mu-1}} = o;$$

folglich, da $\quad \delta\,\frac{d^r\,V_{(1)}}{da^r} = \frac{d^r\,\delta V_{(1)}}{da^r}$ ist,

$$\frac{d\delta V_{(1)}}{da} = o,\ \frac{d^2\delta V_{(1)}}{da^2} = o,\ \frac{d^3\delta V_{(1)}}{da^3} = o,\ \ldots\ \frac{d^{\mu-1}\delta V_{(1)}}{da^{\mu-1}} = o,$$

und daher

$$C = \Gamma_{(1)}.$$

Dieses vorausgesetzt, hat man für δV zwischen den geforderten Grenzen, indem man, für $x = b, \int \chi dx$ mit $\Gamma_{(2)}$ bezeichnet, die Gleichung

$$\delta V \; {}^{1\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-1}\Delta_{(2)}\overset{r}{\Psi}_{(1)}}{db^{r-1}}+\frac{d\delta V_{(2)}}{db}\,{}^{2\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-2}\Delta_{(2)}\overset{r}{\Psi}_{(2)}}{db^{r-2}}+\frac{d^2\delta V_{(2)}}{db^2}\,{}^{3\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-3}\Delta_{(2)}\overset{r}{\Psi}_{(2)}}{db^{r-3}}$$

$$+\frac{d^3\delta V_{(2)}}{db^4}\,{}^{4\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-4}\Delta_{(2)}\overset{r}{\Psi}_{(2)}}{db^{r-4}}+\ldots\mp\frac{d^{\mu-1}\,\delta V_{(2)}}{db^{\mu-1}}\,\Delta_{(2)}\overset{\mu}{\Psi}_{(2)}+\Gamma_{(2)}-\Gamma_{(1)}=o.$$

Da aber die Gleichung für Δ

$$\Delta\,\Psi+{}^{1\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^r\Delta\overset{r}{\Psi}}{dx^r}=o,$$

als eine Differenzial-Gleichung von der μ^{ten} Ordnung, zu einer primitiven mit μ beliebigen Constanten führt: so wird man $(\mu-1)$ derselben dergestalt bestimmen können, dass man habe

$${}^{2\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-2}\Delta_{(2)}\overset{r}{\Psi}_{(2)}}{db^{r-2}}=o,$$

$${}^{3\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-3}\Delta_{(2)}\overset{r}{\Psi}_{(2)}}{db^{r-3}}=o,$$

$${}^{4\ldots\mu}\overset{r}{\Sigma}\mp\frac{d^{r-4}\Delta_{(2)}\overset{r}{\Psi}_{(2)}}{db^{r-4}}=o$$

u. s. w.

Unter dieser Voraussetzung geht die obige Gleichung, da

$$\Gamma_{(2)}-\Gamma_{(1)}=\int\chi dx,$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ genommen, ist, über in

$$\overset{\mathrm{I}}{\delta V}{}^{1\ldots\mu}\,\Sigma \mp \frac{\mathrm{d}^{r-1}\,\Delta_{(2)}\overset{\mathrm{r}}{\Psi}_{(2)}}{\mathrm{d}b^{r-1}} + \int \chi \mathrm{d}x = o,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Setzt man nun ferner für χ den vorigen Werth, und behandelt diese Grösse nach der oben dargestellten Methode, so wird man offenbar zu einer, der vorigen vollkommen ähnlichen Form gelangen.

Die Differenzial-Gleichung für Δ wird freilich in den mehresten Fällen nicht integrirt werden können; inzwischen ist dieses hinsichtlich des Zweckes, um dessentwillen die obige Transformation vorgenommen wird, auch nicht nothwendig, wie solches bei der Anwendung näher erhellen wird.

§. 28.

Bis hiezu betrachteten wir bloss Formeln von Einer absolut-unabhängigen Grösse. Die Ausdrücke mehrerer absolut-unabhängigen Grössen sind einer, der vorigen ganz analogen Behandelung fähig; nur nimmt die Verwickelung der Gestalt des End-Resultates mit der Anzahl derselben unverhältnissmässig zu. Eine nähere Betrachtung des Falles, wo zwei solche Grössen zu Grunde liegen, wird hinreichen, sowohl das eine, als das andere zu zeigen.

Es sei

$$W = F\left\{x, y, z, \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right), \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right), \left(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}\right), \left(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\right), \left(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2}\right), \ldots\right\},$$

wo z als eine Funktion von x und y, beide als absolut-unabhängig betrachtet, angesehen wird; und

$$V = \int\int W \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Es dürfte vielleicht nicht überflüssig seyn, ausdrücklich zu bemerken, dass $\int\int W \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}y \int W \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x \int W \mathrm{d}y$ ist, wo die Integrationen dergestalt vollzogen gedacht werden, dass in $\int W \mathrm{d}x$ die Grösse y, und in $\int \mathrm{d}y \, (\int W \mathrm{d}x)$ die Grösse x als constant betrachtet wird. Soll nun von einem solchen Ausdruck das Integral innerhalb bestimmter Grenzen, z. B. von $x = a$ bis $x = a'$, und von $y = b$ bis $= b'$, genommen werden, so wird man $\int W \mathrm{d}x$, y als constant behandelnd, von $x = a$ bis $x = a'$, und darauf, indem man die resultirende Grösse durch $\int W \mathrm{d}x$ selbst andeutet, $\int \mathrm{d}y \, (\int W \mathrm{d}x)$ von $y = b$ bis $y = b'$ erstrecken, oder auch umgekehrt verfahren können.

Nun ist für V von $x = a$ bis $x = a'$, und von $y = b$ bis $y = b'$,

$$\delta V = \int\int \delta V \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

die Integrale innerhalb derselben Grenzen genommen.

Bezeichnet man daher, der Bequemlichkeit wegen,

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right) \text{ mit } Z, \quad \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}.\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)}\right) \text{ mit } Z^{(1)}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}.\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)}\right) \text{ mit } Z_{(1)},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}.\left(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}\right)}\right) \text{ mit } Z^{(2)}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}.\left(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\right)}\right) \text{ mit } Z^{(1)}_{(1)}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}.\left(\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2}\right)}\right) \text{ mit } Z_{(2)},$$

$$\text{allgemein } \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}.\left(\frac{\mathrm{d}^{m+n} z}{\mathrm{d}x^m \, \mathrm{d}y^n}\right)}\right) \text{ mit } Z^{(m)}_{(n)}:$$

so hat man,

$$\delta W = Z\delta z + Z^{(1)}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + Z_{(1)}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) + Z^{(2)}\left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right) + Z^{(1)}_{(1)}\left(\frac{d^2\delta z}{dx\,dy}\right) + Z_{(2)}\left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right) + \cdots;$$

mithin

$$\delta V = \int\int dx\, dy \begin{cases} Z\delta z + Z^{(1)}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) + Z^{(2)}\left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right) + Z^{(3)}\left(\frac{d^3\delta z}{dx^3}\right) + \cdots \\ \quad + Z_{(1)}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) + Z^{(1)}_{(1)}\left(\frac{d^2\delta z}{dx dy}\right) + Z^{(2)}_{(1)}\left(\frac{d^3\delta z}{dx^2\, dy}\right) + \cdots \\ \qquad + Z_{(2)}\left(\frac{d^2\delta z}{dy^2}\right) + Z^{(1)}_{(2)}\left(\frac{d^3\delta z}{dx\, dy^2}\right) + \cdots \\ \qquad\quad + Z_{(3)}\left(\frac{d^3\delta z}{dy^{(3)}}\right) + \cdots \end{cases}$$

u. s. w.

die Integrale von $x = a$ bis $x = a'$, und von $y = b$ bis $y = b'$ genommen; zu welchem Ausdrucke, unter Berücksichtigung der Variation von x und y, offenbar noch

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y = \delta x \int W dy + \delta y \int W dx$$

hinzugefügt werden muss.

Die Forderung, welche eine vorzunehmende Transformation hier zu erfüllen hat, ist der des §'s. 23. vollkommen analog, und kann auf eine ähnliche Weise erledigt werden. So wie dort, könnte man auch hier eine allgemeine Reductions-Formel aufstellen; inzwischen würde dieselbe so verwickelt ausfallen, dass es weit bequemer und auch für den vorliegenden Zweck hinreichend ist, die Transformation an dem obigen Ausdruck unmittelbar zu vollziehen, nachdem sie durch eine wiederholte Anwendung des Satzes

$$\int P \frac{d^m Q}{dx^m} dx = P \frac{d^{m-1} Q}{dx^{m-1}} - \int \frac{dP}{dx} \frac{d^{m-1} Q}{dx^{m-1}} dx$$

geleistet werden kann. Hiernach ist nehmlich

$$\iint Z^{(1)}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) dx\,dy = \int Z^{(1)}\,\delta z\,dy - \iint\left(\frac{dZ^{(1)}}{dx}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

$$\iint Z_{(1)}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) dx\,dy = \int Z_{(1)}\,\delta z\,dx - \iint\left(\frac{dZ_{(1)}}{dy}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

$$\iint Z^{(2)}\left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right) dx\,dy = \int Z^{(2)}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)dy - \int\left(\frac{dZ_{(2)}}{dx}\right)\delta z\,dy + \iint\left(\frac{d^2Z^{(2)}}{dx^2}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

$$\iint Z^{(1)}_{(1)}\left(\frac{d^2\delta z}{dx\,dy}\right)dx\,dy = Z^{(1)}_{(1)}\delta z - \int\left(\frac{dZ^{(1)}_{(1)}}{dx}\right)\delta z\,dx - \int\left(\frac{dZ^{(1)}_{(1)}}{dy}\right)\delta z\,dy + \iint\left(\frac{d^2Z^{(1)}_{(1)}}{dx\,dy}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

$$\iint Z_{(2)}\left(\frac{d^2\delta z}{dy^2}\right)dx\,dy = \int Z_{(2)}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)dx - \int\left(\frac{dZ_{(2)}}{dy}\right)\delta z\,dx + \iint\left(\frac{dZ_{(2)}}{dy^2}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

$$\iint Z^{(3)}\left(\frac{d^3\delta z}{dx^3}\right)dx\,dy = \int Z^{(3)}\left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right)dy - \int\left(\frac{dZ^{(3)}}{dx}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)dy + \int\left(\frac{d^2Z^{(3)}}{dx^2}\right)\delta z\,dy -$$

$$- \iint\left(\frac{d^3Z^{(3)}}{dx^3}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

$$\iint Z^{(2)}_{(1)}\left(\frac{d^3\delta z}{dx^2dy}\right)dx\,dy = Z^{(2)}_{(1)}\left(\frac{d\delta z}{dx}\right) - \int\left(\frac{dZ^{(2)}_{(1)}}{dx}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)dy - \left(\frac{dZ^{(2)}_{(1)}}{dx}\right)\delta z$$

$$+ \int\left(\frac{d^2Z^{(2)}_{(1)}}{dx\,dy}\right)\delta z\,dy + \int\left(\frac{d^2Z^{(2)}_{(1)}}{dx^2}\right)\delta z\,dx - \iint\left(\frac{d^3Z^{(2)}_{(1)}}{dx^2dy}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

$$\iint Z^{(1)}_{(2)}\left(\frac{d^3\delta z}{dx\,dy^2}\right)dx\,dy = Z^{(1)}_{(2)}\left(\frac{d\delta z}{dy}\right) - \int\left(\frac{dZ^{(1)}_{(2)}}{dx}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)dx - \left(\frac{dZ^{(1)}_{(2)}}{dy}\right)\delta z$$

$$+ \int\left(\frac{d^2Z^{(1)}_{(2)}}{dx\,dy}\right)\delta z\,dx + \int\left(\frac{d^2Z^{(1)}_{(2)}}{dy^2}\right)\delta z\,dy - \iint\left(\frac{d^3Z^{(1)}_{(2)}}{dx\,dy^2}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

$$\iint Z_{(3}\left(\frac{d^3\delta z}{dy^3}\right)dx\,dy = \int Z_{(3}\left(\frac{d^2\delta z}{dy^2}\right)dx - \int\left(\frac{dZ_{(3}}{dy}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)dx + \int\left(\frac{d^2 Z_{(3}}{dy^2}\right)\delta z\,dx$$

$$-\iint\left(\frac{d^3 Z_{(3)}}{dy^3}\right)\delta z\,dx\,dy;$$

u. s. w. u. s. w.

Substituirt man nun diese Werthe in dem obigen Ausdrucke für δV und ordnet solchen, so kommt

$$\delta V = \iint dx\,dy\,\delta z \left\{ \begin{array}{l} Z - \left(\frac{dZ^{(1)}}{dx}\right) + \left(\frac{d^2 Z^{(2)}}{dx^2}\right) - \left(\frac{d^3 Z^{(3)}}{dx^3}\right) + \ldots \\ \quad - \left(\frac{dZ_{(1)}}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 Z^{(1)}_{(1)}}{dx\,dy}\right) - \left(\frac{d^3 Z^{(2)}_{(1)}}{dx^2\,dy}\right) + \ldots \\ \quad\quad + \left(\frac{d^2 Z_{(2)}}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^3 Z^{(1)}_{(2)}}{dx\,dy^2}\right) + \ldots \\ \quad\quad\quad - \left(\frac{d^3 Z_{(3)}}{dy^3}\right) + \ldots \end{array} \right.$$

$$+ \int dy\,\delta z \left\{ \begin{array}{l} Z^{(1)} - \left(\frac{dZ^{(2)}}{dx}\right) + \left(\frac{d^2 Z^{(3)}}{dx^2}\right) - \ldots \\ \quad - \left(\frac{dZ^{(1)}_{(1)}}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 Z^{(2)}_{(1)}}{dx\,dy}\right) - \ldots \\ \quad\quad + \left(\frac{d^2 Z^{(1)}_{(2)}}{dy^2}\right) - \ldots \end{array} \right.$$

$$+ \int dx\,\delta z \left\{ \begin{array}{l} Z_{(1)} - \left(\frac{dZ^{(1)}_{(1)}}{dx}\right) + \left(\frac{d^2 Z^{(2)}_{(1)}}{dx^2}\right) - \ldots \\ \quad - \left(\frac{dZ_{(2)}}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 Z^{(1)}_{(2)}}{dx\,dy}\right) - \ldots \\ \quad\quad + \left(\frac{d^2 Z_{(3)}}{dy^2}\right) - \ldots \end{array} \right.$$

$$+\int dy \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) \begin{cases} Z^{(2)} - \left(\frac{dZ_{(3)}}{dx}\right) + \ldots \\ \quad - \left(\frac{dZ^{(2)}_{(1)}}{dy}\right) + \ldots \end{cases}$$

$$+\int dx \left(\frac{d\delta z}{dy}\right) \begin{cases} Z_{(2)} - \left(\frac{dZ^{(1)}_{(2)}}{dx}\right) + \ldots \\ \quad - \left(\frac{dZ_{(3)}}{dy}\right) + \ldots \end{cases}$$

$$+\int dy \left(\frac{d^2\delta z}{dx^2}\right) \left\{ \quad Z^{(3)} \quad - \ldots \right.$$

$$+\int dx \left(\frac{d^2\delta z}{dy^2}\right) \left\{ \quad Z_{(3)} \quad - \ldots \right.$$

u. s. w.

$$+ \quad \delta z \begin{cases} Z^{(1)}_{(1)} - \left(\frac{dZ^{(2)}_{1}}{dx}\right) \quad + \ldots \\ \quad - \left(\frac{dZ^{(1)}_{(2)}}{dy}\right) \quad + \ldots \end{cases}$$

$$+ \left(\frac{d\delta z}{dx}\right) \left\{ Z^{(2)}_{(1)} - \ldots \right.$$

$$+ \left(\frac{d\delta z}{dy}\right) \left\{ Z^{(1)}_{(2)} - \ldots \right.$$

u. s. w.

von $x = a$ bis $x = a'$, und von $y = b$ bis $y = b'$ genommen; zu welchem Ausdrucke noch

$$\delta x \int W dy + \delta y \int W dx$$

hinzugefügt werden muss, so fern man zugleich die Variationen von x und y zu berücksichtigen wünscht.

Man sieht leicht, dass dieser Ausdruck aus drei Hauptttheilen besteht. Erstlich aus einem, der sich unter dem doppelten Integrations-Zeichen befindet, und in welchem der höchste Differenzial-Coefficient, im Allgemeinen, so fern W von der n^{ten} Ordnung ist, von der $2n^{ten}$ Ordnung seyn wird. Zweitens aus einem Theile unter dem einfachen Integrations-Zeichen, theils nach x, theils nach y, zusammen, so fern die Variationen von x und y unberücksichtigt bleiben, $2n$ Glieder enthaltend. Drittens aus einem, von dem Integrations-Zeichen gänzlich befreiten Theile, welcher aus $\frac{n(n-1)}{2}$ Gliedern besteht.

Bezeichnet man nun, der Kürze und Deutlichkeit wegen,

$$\left(\frac{d^r \delta z}{dx^r}\right) \text{ für } x = a \text{ mit } \left(\frac{d^r \delta z^{(a)}}{da^r}\right); \left(\frac{d^r \delta z}{dy^r}\right) \text{ für } y = b \text{ mit } \left(\frac{d^r \delta z^{(b)}}{db^r}\right);$$

$$\text{-- für } x = a' \text{ mit } \left(\frac{d^r \delta z^{(a')}}{da'^r}\right); \text{ -- für } y = b' \text{ mit } \left(\frac{d^r \delta z^{(b')}}{db'^r}\right);$$

wie auch den von dem Integrations-Zeichen befreiten Theil,

$$\begin{aligned} \text{für } x = a \text{ und } y = b \text{ mit } \Omega^{(a)}_{(b)} \\ x = a' \text{ und } y = b \text{ mit } \Omega^{(a')}_{(b)} \\ x = a \text{ und } y = b' \text{ mit } \Omega^{(a)}_{(b')} \\ x = a' \text{ und } y = b' \text{ mit } \Omega^{(a')}_{(b')} \end{aligned}$$

wodurch derselbe, für $x = a$ bis $x = a'$, und $y = b$ bis $y = b'$, übergeht in

$$\Omega^{(a')}_{(b')} - \Omega^{(a)}_{(b')} - \Omega^{(a')}_{(b)} + \Omega^{(a)}_{(b)};$$

so wird man den vorigen Ausdruck unter folgender Form darstellen können:

$$\begin{aligned}
\delta V = & \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\delta z\,F(x,y) \\
& + \int \mathrm{d}y\,\delta z^{(a')} f^{(y)}(a',y) + \int \mathrm{d}x\,\delta z_{(b')} f^{(x)}(x,b') \\
& + \int \mathrm{d}y \left(\frac{\mathrm{d}\delta z^{(a')}}{\mathrm{d}a'}\right) f^{(y)}_{(1)}(a',y) + \int \mathrm{d}x \left(\frac{\mathrm{d}\delta z_{(b')}}{\mathrm{d}b'}\right) f^{(x)}_{(1)}(x,b') \\
& + \int \mathrm{d}y \left(\frac{\mathrm{d}^2\delta z^{(a')}}{\mathrm{d}a'^2}\right) f^{(y)}_{(2)}(a',y) + \int \mathrm{d}x \left(\frac{\mathrm{d}^2\delta z_{(b')}}{\mathrm{d}b'^2}\right) f^{(x)}_{(2)}(x,b') \\
& \text{u. s. w.} \\
& - \int \mathrm{d}y\,\delta z^{(a)} f^{(y)}(a,y) - \int \mathrm{d}x\,\delta z_{(b)} f^{(x)}(x,b) \\
& - \int \mathrm{d}y \left(\frac{\mathrm{d}\delta z^{(a)}}{\mathrm{d}a}\right) f^{(y)}_{(1)}(a,y) - \int \mathrm{d}x \left(\frac{\mathrm{d}\delta z_{(b)}}{\mathrm{d}b}\right) f^{(x)}_{(1)}(x,b) \\
& - \int \mathrm{d}y \left(\frac{\mathrm{d}^2\delta z^{(a)}}{\mathrm{d}a^2}\right) f^{(y)}_{(2)}(a,y) - \int \mathrm{d}x \left(\frac{\mathrm{d}^2\delta z_{(b)}}{\mathrm{d}b^2}\right) f^{(x)}_{(2)}(x,b) \\
& \text{u. s. w.} \\
& + \Omega^{(a')}_{(b')} - \Omega^{(a)}_{(b')} - \Omega^{(a')}_{(b)} + \Omega^{(a)}_{(b)};
\end{aligned}$$

wo die Integrale von $x = a$ bis $x = a'$, und von $y = b$ bis $y = b'$ erstreckt gedacht werden. Die Berücksichtigung der Variationen von x und y würde noch die schon mehrmahls erwähnte Grösse

$$\delta x \int W \mathrm{d}y + \delta y \int W \mathrm{d}x,$$

innerhalb der nehmlichen Grenzen genommen, verschaffen.

DRITTES KAPITEL.

Anwendung der Variations-Rechnung auf die Bestimmung des Grössten und Kleinsten.

§. 29.

Wenn in einer identischen Gleichung von der Form

$$y = f(x),$$

wo x die unabhängige, y die abhängige Grösse, und $f(x)$ eine beliebige algebraische oder transcendente Funktion von x bezeichnet, der Grösse x nach und nach alle Werthe, von $-\infty$ bis $+\infty$, beigelegt werden; so sind in Beziehung auf die verschiedenen Werthe, welche daraus für y entstehen, vorausgesetzt, dass sie fortwährend reell bleiben, zwei Fälle denkbar; entweder werden diese immerfort allmählig zu- oder abnehmen, oder in Ansehung dieser Zu- oder Abnahme einer oder mehrern Grenzen unterworfen seyn, vermöge welcher sie anfangs wachsend, nachher aber abnehmend, oder umgekehrt, fortschreiten. Im letzten Falle muss es in der Reihe von Werthen

für y nothwendig einen oder mehrere geben, die grösser oder kleiner, als die ihnen unmittelbar vorhergehenden und folgenden sind. Denjenigen Werth in dieser Reihe, welcher grösser, als der ihm unmittelbar vorhergehende und folgende ist, nennt man ein Grösstes, oder ein *Maximum*; während derjenige, welcher kleiner als jene ist, ein Kleinstes, oder ein *Minimum*, genannt wird.

§. 30.

Denkt man sich in obiger Gleichung anstatt des unbestimmten x die zweitheilige Grösse $x+i$ gesetzt, und den dadurch entstehenden, von i abhängigen Theil mit Δy bezeichnet; so erlangt man die identische Gleichung

$$\Delta y = f(x+i) - f(x).$$

Da Δy den Unterschied zwischen den beiden Werthen von y, x und $x+i$ entsprechend, darstellt; so wird auch eben diese Grösse, so fern für i jeder Grad von Kleinheit gestattet bleibt, den Unterschied zwischen dem vorhergehenden und folgenden Werth von y, ganz allgemein, repräsentiren können. So lange daher Δy, für bestimmte Werthe von x, wie klein auch i genommen werde, positiv ist, werden die verschiedenen Werthe von y wachsend, — so lange aber diese Grösse negativ ist, jene Werthe abnehmend fortgehen. Wenn also y anfangs wachsend, nachher aber abnehmend, oder umgekehrt, anfangs abnehmend, nachher aber zunehmend, fortschreiten soll; so wird Δy, im ersten Falle, anfangs positiv, nachher aber negativ seyn, mithin aus dem Positiven in das Negative, — im letzten Falle hingegen negativ, nachher aber positiv, folglich aus dem Negativen in das Positive übergehen müssen. Wenn nun Δy, durch eine allmählige Zunahme von x, aus dem Negativen in das Positive, oder umgekehrt, von dem Positiven in das Negative übergehen soll; so

wird es nothwendigerweise einen Werth für x, z. B. a, geben müssen, so beschaffen, dass, wenn man statt seiner $a+h$ substituirt, Δy positiv oder negativ, -- wenn man aber $a-h$ substituirt, Δy negativ oder positiv wird, wie klein auch h und i, die übrigens vollkommen unabhängig von einander sind, genommen werden. Offenbar ist es alsdann dieser Werth von x, a nehmlich, der einem Maximum oder Minimum von y entspricht.

Setzt man daher in der obigen Gleichung für Δy anstatt x einmal $a+h$, und ein andermal $a-h$, so hat man, indem man für a das Zeichen x beibehält, hinsichtlich des Maximums und Minimums folgende zwei Bedingungen:

$$f(x+h+i) - f(x+h) \text{ negativ oder positiv,}$$
$$f(x-h+i) - f(x-h) \text{ positiv oder negativ,}$$

wie klein auch h und i genommen werden.

Entwickelt man nun diese Grössen nach steigenden Potenzen von i, so erlangt man für jene Bedingungen, wegen des unbestimmten h,

$$\frac{\mathrm{d}f(x+h)}{\mathrm{d}x}i + \frac{\mathrm{d}^2 f(x+h)}{\mathrm{d}x^2}\frac{i^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3 f(x+h)}{\mathrm{d}x^3}\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots \text{ negativ oder positiv,}$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x-h)}{\mathrm{d}x}i + \frac{\mathrm{d}^2 f(x-h)}{\mathrm{d}x^2}\frac{i^2}{1.2} + \frac{\mathrm{d}^3 f(x-h)}{\mathrm{d}x^3}\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots \text{ positiv oder negativ,}$$

wie klein auch h und i genommen werden.

Da diese Reihen mit $i = o$ verschwinden, so kann bekanntlich i so klein gedacht werden, dass die Zeichen ihrer Werthe allein von denen ihrer Anfangsglieder abhängig sind. Die vorigen Bedingungen gehen also, da i als positiv betrachtet wird, über in

$$\frac{\mathrm{d}.f(x+h)}{\mathrm{d}x} \text{ negativ oder positiv,}$$

und $\frac{d.f(x-h)}{dx}$ positiv oder negativ,

wie klein auch h genommen werde.

§. 31.

Bekanntlich ist das Zeichen einer zusammengesetzten Grösse von den Zeichen ihrer Factoren und Divisoren abhängig. Damit also die obigen Bedingungen statt finden können, werden sie nothwendigerweise für einen der Factoren oder Divisoren jener Grössen statt haben müssen. Bezeichnen wir daher irgend einen einfachen Factor oder Divisor von $\frac{d.f(x\pm h)}{dx}$ mit $\varphi(x\pm h)$ worunter also eine ganze Funktion von x verstanden wird; so haben wir die Bedingungen

$$\varphi(x+h) \text{ negativ oder positiv,}$$
$$\varphi(x-h) \text{ positiv oder negativ,}$$

wie klein auch h genommen werde.

Entwickelt man diese Grössen nach steigenden Potenzen von h, so erlangt man die Formen

$$\varphi(x)+Mh^m+Nh^n+Ph^p+\ldots \text{ negativ oder positiv,}$$

$$\varphi(x)+M(-h)^m+N(-h)^n+P(-h)^p,+\ldots \text{ positiv oder negativ,}$$

wie klein auch h genommen werde, und wo, wegen des besonderen Werthes von x, die Exponenten m, n, $p\ldots$ so wohl gebrochene, als ganze, nur, indem die von h abhängigen Theile für $h=o$ verschwinden müssen, keine negative Zahlen seyn können. Da nun, aus eben diesem Grunde, h so klein genommen werden kann, dass das Zeichen des Werthes einer jeden von diesen Reihen bloss von dem des Anfangsgliedes abhängig ist; so hat man

$$\varphi(x) + Mh^m \text{ negativ oder positiv,}$$

$$\varphi(x) + M(-h)^m \text{ positiv oder negativ,}$$

wie klein auch h genommen werde.

Da ferner m eine positive Zahl ist, so kann offenbar diesen Bedingungen keine Genüge geschehen, wenn nicht wenigstens

$$\varphi(x) = o$$

ist; obgleich es auch zugleich einleuchtet, dass diese Gleichung sehr wohl statt finden kann, ohne dass dennoch obige Bedingungen erfüllt werden.

Nun ist es klar, dass, da $\varphi(x \pm h)$ einen Factor oder Divisor von $\frac{d.f(x \pm h)}{dx}$ bezeichnet, $\varphi(x)$ ein Factor oder Divisor von $\frac{d.f(x)}{dx}$ seyn wird. Die Gleichung $\varphi(x) = o$ hat also zu Folge

entweder $$\frac{df(x)}{dx} = o,$$

oder $$\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = o,$$

§. 32.

Da von den beiden letzten Gleichungen nothwendigerweise eine statt finden muss, wenn die beiden obigen Bedingungen überhaupt erfüllbar seyn sollen; so wollen wir uns, zur Ermittelung der übrigen gen Bedingungen, den aus dieser Gleichung für x hervorgehenden Werth in den obigen Bedingungen

$$\frac{d.f(x+h)}{dx} \text{ negativ oder positiv,}$$

$$\frac{d.f(x-h)}{dx} \text{ positiv oder negativ,}$$

substituirt, und diese Ausdrücke nach steigenden Potenzen von h entwickelt vorstellen. Man erlangt alsdann offenbar

$$Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + Ch^{\gamma} + \ldots \text{ negativ oder positiv,}$$

$$A(-h)^{\alpha} + B(-h)^{\beta} + C(-h)^{\gamma} + \ldots \text{ positiv oder negativ,}$$

wie klein auch h genommen werde, wo α, β, $\gamma \ldots$ sowohl negative, als positive, ganze als gebrochene Zahlen seyn können.

Da nun h so klein genommen werden kann, dass das erste Glied in jeder dieser Reihen alle folgenden überwiegt; so kommen diese Bedingungen auf

$$Ah^{\alpha} \text{ negativ oder positiv,}$$

$$A(-h)^{\alpha} \text{ positiv oder negativ,}$$

zurück, die offenbar nicht erfüllt werden können, wenn nicht α entweder eine ungerade ganze Zahl, oder ein Bruch von ungeradem Zähler und Nenner ist. Ist alsdann A negativ, so ist $\frac{d.f(x+h)}{dx}$ negativ, und $\frac{d.f(x-h)}{dx}$ positiv; Δy nimmt in diesem Falle mit der Zunahme von x ab, und es ist y ein Maximum. Ist hingegen A positiv, so ist auch $\frac{d.f(x+h)}{dx}$ positiv, $\frac{d.f(x-h)}{dx}$ aber negativ, und Δy nimmt zu, wenn x zunimmt; y ist alsdann ein Minimum.

Stellen wir das Bisherige unter einen Gesichtspunkt zusammen, so haben wir folgendes Resultat:

Ist $y = f(x)$, so hat man, sowohl für das Maximum, als das Minimum von y die gemeinschaftliche Bedingung:

entweder $$\frac{df(x)}{dx} = o,$$

oder $$\frac{1}{\frac{df(x)}{dx}} = o,$$

aus einer von welchen Gleichungen sich der Werth von x, einem Grössten und Kleinsten, wenn es ein solches giebt, entsprechend, ergiebt. Um alsdann ferner zu untersuchen, ob dieser Werth von x wirklich einem grössten oder kleinsten Werthe von y angehöre, substituire man ihn anstatt x in $\frac{df(x+h)}{dx}$, und entwickele diese Grösse nach steigenden Potenzen von h. Ist alsdann der niedrigste Exponent von h eine ungerade Zahl oder ein Bruch von ungeradem Zähler und Nenner, so ist entweder ein Maximum oder ein Minimum vorhanden, und zwar ersteres, wenn der Coefficient des Anfangsgliedes negativ, letzteres hingegen, wenn derselbe positiv ist.

§. 33.

Für den Fall aber, wo der Ausdruck

$$\frac{df(x+h)}{dx},$$

nach der Substitution des, einem Grössten oder Kleinsten entsprechenden, Werthes von x anstatt x, der Entwickelung nach ganzen und positiven Exponenten von h fähig bleibt, lässt sich die Regel für das Criterium eines Maximums und Minimums, und für die Entscheidung zwischen beiden, etwas bequemer abfassen. In diesem Falle ist nehmlich, so fern man

$$\frac{d.f(x+h)}{dx} = Ah^\alpha + Bh^\beta + Ch^\gamma + \ldots$$

setzt,

$$A = \frac{1}{1.2.3\ldots\alpha} \frac{\mathrm{d}^\alpha \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x^\alpha} = \frac{1}{1.2.3\ldots\alpha} \frac{\mathrm{d}^{\alpha+1} f(x)}{\mathrm{d}x^{\alpha+1}},$$

wo also, wenn α eine ungerade Zahl ist, $\alpha + 1$ eine gerade Zahl seyn wird. Da nun die Reihe

$$Ah^\alpha + Bh^\beta + Ch^\gamma + \ldots$$

in welche die Entwickelung von $\frac{\mathrm{d}f(x+h)}{\mathrm{d}x}$, nach jener Substitution, ganz allgemein übergeht, unter der Voraussetzung, dass α, β, γ . . . ganze und positive Zahlen seien, nicht die Entwickelung von $\frac{\mathrm{d}f(x+h)}{\mathrm{d}x}$ darstellen kann, wenn nicht $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = o$ ist; so hat man in diesem Falle erst die gemeinschaftliche Bedingung:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = o;$$

ferner muss der niedrigste Exponent von h in der Entwickelung von $f(x+h)$ eine gerade Zahl seyn; und endlich, indem man diesen Exponenten mit λ bezeichnet, $\frac{\mathrm{d}^\lambda f(x)}{\mathrm{d}x^\lambda}$ negativ für das Maximum, und positiv für das Minimum.

Dies ist die Regel, welche für die Bestimmung eines Maximums oder Mimimums einer algebraischen oder transcendenten Funktion von Einer veränderlichen Grösse gewöhnlich gegeben wird. Man sieht, dass sie auf der ausdrücklichen Voraussetzung beruht, dass die

Grösse $f(x+h)$, nach der Substitution des für x gefundenen Werthes, der Entwickelung nach ganzen und positiven Exponenten von h fähig bleibe, welches bekanntlich Ausnahmen leidet.

Die Regeln, welche man für die Bestimmung eines Maximums oder Minimums einer algebraischen oder transcendenten Funktion mehrerer veränderlichen Grössen zu geben pflegt, beruhen auf ähnlichen Voraussetzungen, und sind daher mit gleicher Einschränkung aufzufassen. Da es aber, von einer andern Seite, klar ist, dass der Fall, wo die Grösse nicht der Entwickelung nach ganzen und positiven Exponenten fähig bleibt, wirklich als eine Ausnahme zu betrachten ist; so lässt sich diese Unvollständigkeit entschuldigen. Es ist aus eben diesem Grunde, dass wir, zur Vermeidung aller zwecklosen Weitläuftigkeiten, uns im Folgenden lediglich auf die Betrachtung des allgemeinen Falles beschränken werden, in der Ueberzeugung, dass es dem Leser, vermöge des Vorigen, ein Leichtes seyn wird, dieselbe auf den Ausnahmefall zu erstrecken.

§. 34.

Es sei

$$V = F(x, y, z, t \ldots),$$

wo x, als absolut-, y, z, $t \ldots$ hingegen als relativ-unabhängig angesehen werden, und F eine beliebige algebraische oder transcendente Funktion von den sich unter demselben befindenden Grössen bezeichnet.

Es ist einleuchtend, dass der Werth von V anders ausfallen wird, jenachdem man für $y, z, t \ldots$ andere Funktionen von x, und für x, selbst einen andern Werth subsituirt. Man wird also nach denjenigen Funktionen für y, z, $t \ldots$ in x fragen können, welche, indem man für x

den Werth x zu Grunde legt, für V ein Maximum oder Minimum, d. h. einen Werth geben, der grösser oder kleiner, als der ihm unmittelbar vorhergehende und folgende ist, welche man erhält, wenn man, für x den Werth x festhaltend, $y, z, t \ldots$ verändern lässt.

Es mögen $y, z, t \ldots$ die Funktionen von x selbst bezeichnen, welche, für $x = x$, den Werth von V zu einem Grössten oder Kleinsten machen. Alsdann hat man offenbar, für $x = x$,

$$F(x, y + k\delta y, z + k\delta z, t + k\delta t \ldots) < F(x, y, z, t \ldots)$$

für ein Maximum, und

$$F(x, y + k\delta y, z + k\delta z, t + k\delta t \ldots) > F(x, y, z, t \ldots)$$

für ein Minimum, von welcher Form auch $\delta y, \delta z, \delta t \ldots$, und wie klein auch k, positiv oder negativ, genommen werden.

Denkt man sich den Ausdruck

$$F(x, y + k\delta y, z + k\delta z, t + k\delta t \ldots)$$

nach ganzen und positiven Exponenten von k, wovon sowohl hier, als im Folgenden die Möglichkeit ausdrücklich vorausgesetzt wird, entwickelt; so hat man

$$k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots$$

$< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum, unabhängig von $k, \delta y, \delta z, \delta t$ u. s. w.

Da aber diese Reihe für $k = o$ verschwindet, so wird man diese Grösse, was auch für $\delta y, \delta z, \delta t \ldots$ gesetzt werde, stets so klein annehmen können, dass das Zeichen des Werthes der Reihe bloss von dem des Anfangsgliedes $k\delta V$ abhängig ist. Weil nun diese Grösse mit k selbst von Zeichen verändert; so wird der Bedingung des

Maximums oder des Minimums nicht genügt werden können, wenn nicht, unabhängig von δy, δz, δt ...

$$\delta V = o$$

ist. Da ferner

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dV}{dt}\right)\delta t + \ldots$$

ist; so hat man

$$\left(\frac{dV}{dy}\right) = o, \left(\frac{dV}{dz}\right) = o, \left(\frac{dV}{dt}\right) = o, \text{ u. s. w.}$$

welche Gleichungen also, dem Maximum und Minimum gemeinschaftlich, indem ihrer eben so viele, als der Unbekannten sind, zur Bestimmung dieser dienen.

Denkt man sich daher die, aus diesen Gleichungen für y, z, t ... hervorgehenden Werthe in x in der obigen Reihe substituirt; so geht dieselbe über in

$$\frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots$$

deren Werth also $< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum, unabhängig von k, δy, δz, δt u. s. w. seyn muss. Da aber k so klein genommen werden kann, dass das Anfansglied dieser Reihe die Summe aller folgenden überwiegt; so erwächst daraus, weil k^2 stets positiv ist, die Bedingung: $\delta^2 V$ oder

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\delta y^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dy\,dz}\right)\delta y\,\delta z + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)\delta z^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dy\,dt}\right)\delta y\,\delta t$$

$$+ 2\left(\frac{d^2V}{dz\,dt}\right)\delta z\,\delta t + \left(\frac{d^2V}{dt^2}\right)\delta t^2 + \ldots$$

$< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum, und zwar unabhängig von δy, δz, δt u. s. w.

§. 35.

Alles kommt demnach darauf an, die Bedingungen zu erforschen, unter welchen eine Funktion von der Form

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dpr + Eqr + Fr^2 + Gps + Hqs + Irs + Ks^2 + \ldots$$

in welcher $A, B, C \ldots$ gegebene, $p, q, r, s \ldots$ aber unbestimmte, von einander unabhängige, jedoch reelle, Grössen bezeichnen, stets positiv oder negativ ausfällt, welche Werthe auch für $p, q, r, s \ldots$ gesetzt werden.

Zu diesem Ende wollen wir uns diese Grösse unter die Form

$$f(p^2 + \alpha q + \beta r + \gamma s + \ldots)^2 + g(q + \beta' r + \gamma' s + \ldots)^2 + h(r + \gamma'' s + \ldots)^2 + l(s + \ldots)^2 + \ldots$$

gebracht denken, wo, wie solches aus der Entwickelung und Vergleichung derselben mit dem vorgesetzten Ausdrucke erhellet,

$$f = A,$$

$$\alpha = \frac{B}{2f},$$

$$g = C - \frac{B^2}{4f},$$

$$\beta = \frac{D}{2f},$$

$$\beta' = \frac{E - \frac{BD}{2f}}{2g},$$

$$h = F - \frac{D^2}{4f} - \frac{\left(E - \frac{BD}{2f}\right)^2}{4g},$$

$$\gamma = \frac{G}{2f},$$

$$\gamma' = \frac{H - \frac{BG}{2f}}{2g},$$

$$\gamma'' = \frac{I - \frac{DG}{2f} - \frac{\left(E - \frac{BD}{2f}\right)\left(H - \frac{BG}{2f}\right)}{2g}}{2h},$$

$$l = K - \frac{G^2}{4f} - \frac{\left(H - \frac{BG}{2f}\right)^2}{4g} - \frac{\left\{I - \frac{DG}{2f} - \frac{\left(E - \frac{BD}{2f}\right)\left(H - \frac{BG}{2f}\right)}{2g}\right\}^2}{4h},$$

u. s. w.

ist.

Nun leuchtet es ein, dass, damit jener Ausdruck, unabhängig von $p, q, r, s \ldots$ stets positiv oder negativ sei, von den Grössen $f, g, h, l \ldots$ nothwendigerweise $f >$ oder $< o$ seyn muss, und eine jede der übrigen im erstern Falle nicht $< o$, und im letztern nicht $> o$ seyn darf; wie auch, wenn dieses statt findet, besagter Ausdruck beständig entweder positiv, oder negativ seyn wird.

§. 36.

Wenden wir dieses Resultat auf den vorigen Ausdruck

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\delta y^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dy\,dz}\right)\delta y\delta z + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)\delta z^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dy\,dt}\right)\delta y\delta t + 2\left(\frac{d^2V}{dz\,dt}\right)\delta z\delta t + \left(\frac{d^2V}{dt^2}\right)\delta t^2 + \ldots$$

(§. 34.) an, wo $\delta y, \delta z, \delta t \ldots$ als beliebige Funktionen von x, für $x = x$ in Repräsentanten beliebiger Zahlenwerthe übergehen, indem wir

$$\delta y = p, \ \delta z = q, \ \delta t = r \ldots$$

mithin
$$\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) = A, \quad 2\left(\frac{d^2V}{dydz}\right) = B, \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) = C,$$
$$2\left(\frac{d^2V}{dydt}\right) = D, \quad 2\left(\frac{d^2V}{dzdt}\right) = E, \left(\frac{d^2V}{dt^2}\right) = F,$$

u. s. w.

setzen: so kommt
$$f = \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)$$
$$g = \frac{\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)f - \left(\frac{d^2V}{dydz}\right)^2}{f}$$
$$h = \frac{\left(\frac{d^2V}{dt^2}\right)f - \left(\frac{d^2V}{dydt}\right)^2}{f} - \frac{\left\{\left(\frac{d^2V}{dz\,dt}\right)f - \left(\frac{d^2V}{dydz}\right)\left(\frac{d^2V}{dydt}\right)\right\}^2}{f^2 g}$$

u. s. w.

oder
$$f = \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)$$
$$g = \frac{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{dy\,dz}\right)^2}{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)}$$
$$h = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\left\{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2V}{dt^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{dy\,dt}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{dydz}\right)^2\right\}}{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left\{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{dy\,dz}\right)^2\right\}} \\ - \dfrac{\left\{\left(\frac{d^2V}{dzdt}\right)\left(\frac{d^4V}{dy^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{dy\,dz}\right)\left(\frac{d^2V}{dy\,dt}\right)\right\}^2}{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left\{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{dydz}\right)^2\right\}} \end{array}\right.$$

u. s. w.

Diesem nach hat man

für das Maximum: $f < o$, und $g, h, \ldots$ nicht $> o$;

für das Minimum: $f > o$, und $g, h, \ldots$ nicht $< o$.

Da aber, wenn $f, g, h \ldots$ mit demselben Zeichen behaftet sind, sowohl fg, als $f^2 gh$ positiv ist; so hat man auch

$\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum, und zugleich

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{dydz}\right)^2 \text{ nicht } < o,$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{dydz}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)\left(\frac{d^2V}{dt^2}\right) - \left(\frac{d^2V}{dydt}\right)\right\} \\ \quad - \left\{\left(\frac{d^2V}{dy^2}\left(\left(\frac{d^2V}{dzdt}\right) - \left(\frac{d^2V}{dydz}\right)\left(\frac{d^2V}{dydt}\right)\right\}^2\right. \end{array}\right\} \text{ nicht } < o,$$

u. s. w.

sowohl für das Maximum, als das Minimum, so fern man $x = x$ setzt.

Uebrigens leuchtet es ein, dass, wenn in der Reihe

$$k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \frac{k^4}{1.2.3.4}\delta^4 V + \ldots$$

mit δV zugleich $\delta^2 V$ gleich Null würde, alsdann, im Falle eines Maximums oder Minimums, auch $\delta^3 V$ verschwinden müsste, u. s. w.

§. 37.

Denkt man sich nun in den letzten Bedingungs-Ausdrücken anstatt $y, z, t, \ldots$ ihre, für das Maximum oder Minimum, in x gefundenen Werthe substituirt, so werden dieselben übergehen in

$\Psi(x) < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum; und zugleich

$$\Psi_{(1)}(x), \text{ wie auch } \Psi_{(2)}(x) \text{ nicht } < o,$$

sowohl für das Maximum, als das Minimum.

Alsdann ist es klar, dass für alle Werthe von x, welche diesen Bedingungen zu entsprechen vermögen, die Grösse V ein Maximum oder ein Minimum, d. h. grösser oder kleiner, als der unmittelbar vorhergehende und folgende Werth seyn wird, welche man für diese Grösse, zwar mit demselben Werthe von x, aber bei veränderter Relation zwischen y, z, t . . . und x erhält. Dass es, allgemein zu reden, mehrere solche Werthe für x geben muss, wenn es überhaupt Einen solchen giebt, leuchtet ebenfalls ein, sobald man nur überlegt, dass $\Psi(x)$, $\Psi_{(1)}(x)$, $\Psi_{(2)}(x)$, für $x = x$ bestimmte Werthe annehmend, im Allgemeinen, einer unendlichen Anzahl andrer Werthe, denselben Bedingungen genügend, fähig bleiben, die sich ersterm auf stetigem Wege anschliessen, und von denen jeder einem besondern Werthe von x entspricht. Im Allgemeinen giebt es also stets ein gewisses Intervall von Werthen für x, für welche V, unter obiger Voraussetzung, ein Maximum oder Minimum wird.

Denkt man sich ferner $\Psi(x)$, $\Psi_{(1)}(x)$, $\Psi_{(2)}(x)$ in Factoren zerlegt, so ist es eben so klar, dass es sogar mehrere, durch gewisse Zwischenräume von einander getrennte, Intervalle von Werthen für x geben kann, welche alle die obigen Bedingungen erfüllen.

Endlich geht hieraus hervor, dass, da V einen andern Werth erhält, je nachdem für x ein andrer Werth gesetzt wird, man auch nach demjenigen Werthe von x fragen kann, für welche V, unter jenen Werthen, ein Grösstes oder Kleinstes werde; eine Frage, deren

Lösung auf die Bestimmung des gewöhnlichen Maximums und Minimums zurück kommt.

§. 38.

Ist inzwischen die Grösse V nicht auf eine entwickelte Weise, sondern durch eine algebraische oder transcendente Gleichung von der Form

$$F\,(V,\ x,\ y,\ z,\ t\ \ldots) = o$$

gegeben; so hat man nur, indem man, der Kürze wegen, $F(V,x,y,z,t\ldots)$ mit F bezeichnet, die variirte Gleichung

$$\left(\frac{dF}{dV}\right)\delta V + \left(\frac{dF}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dF}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dF}{dt}\right)\delta t + \ldots = o,$$

zu nehmen, und δV, unabhängig von δy, δz, δt ..., gleich Null zu machen, wodurch man erhält

$$\left(\frac{dF}{dy}\right) = o,\ \left(\frac{dF}{dz}\right) = e,\ \left(\frac{dF}{dt}\right) = o, \text{ u. s. w.}$$

welche, in Verbindung mit der gegebenen

$$F\,(V,\ x,\ y,\ z,\ t\ \ldots) = o$$

zur Bestimmung von $y, z, t\ldots$ und V, einem Maximum oder Minimum entsprechend, dienen werden. Ferner wird man noch die variirte Gleichung der zweiten Ordnung zu nehmen, hieraus, in Verbindnng mit den vorigen, den Werth von $\delta^2 V$ zu ziehen, und vermittelst dessen, nach den oben entwickelten Bedingungen, über das Maximum oder Minimum zu entscheiden haben.

Da die Regeln, auf welche die Bestimmung eines Maximums oder Minimums in diesen beiden Fällen zurückkommt, mit denen für die gewöhnlichen Grössten und Kleinsten zusammen fallen; so wird es nicht nöthig seyn, dieselben durch besondere Beispiele zu erläutern.

§. 39.

Im Vorhergehenden sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, dass die in V enthaltenen relativ-unabhängigen Grössen alle unabhängig von einander seien. Sollte dieses aber nicht der Fall seyn, so würde man auf die desfallsigen Bedingungsgleichungen Rücksicht zu nehmen haben. Das Verfahren, welches sich unter diesen Umständen zunächst darbiethet, besteht darin, vermittelst der gegebenen Bedingungsgleichungen eben so viele von den Unbekannten zu eliminiren, und alsdann in Beziehung auf die zurückbleibenden das Maximum oder Minimum zu bestimmen. Inzwischen könnte diese Methode, nach Maassgabe der gegebenen Gleichungen, höchst beschwerlich werden, weshalb es nicht ohne Interesse seyn wird, in dieser Hinsicht einen andern Weg zu bezeichnen.

Es sei

$$V = F\,(x, y, z, t, u \ldots),$$

wo $y, z, t, u \ldots, n$ an der Zahl, die relativ-unabhängigen Grössen bezeichnen, zwischen welchen die m folgenden Bedingungs-Gleichungen vorhanden seien:

$$W = \varphi\,(x, y, z, t, u \ldots) = o,$$

$$W_{(1)} = \varphi_{(1)}\,(x, y, z, t, u \ldots) = o,$$

$$W_{(2)} = \varphi_{(2)}\,(x, y, z, t, u \ldots) = o,$$

u. s. w.

$$W_{(m-1)} = \varphi_{(m-1)}(x, y, z, t, u \ldots) = o.$$

Kraft der dem Maximum und dem Minimum gemeinschaftlichen Bedingung hat man

$$\delta V = o,$$

und Kraft jener Bedingungsgleichungen, die als unabhängig von jeder besondern Form und Werth für y, z, t, u ... statt findend gedacht werden,

$$\delta W = o, \ \delta W_{(1)} = o, \ \delta W_{(2)} = o, \text{ u. s. w. } \delta W_{(m-1)} = o.$$

Um daher zu den Gleichungen des Maximums oder Minimums zu gelangen, wird man, vermittelst der letzten m Gleichungen, von den n Variationen δy, δz, δt, δu ..., in der vorhergehenden enthalten, eine Anzahl von m eliminiren, und die resultirende Gleichung, unabhängig von den zurückbleibenden und deshalb von einander inpendenten Variationen, gleich Null machen können.

Die Aufgabe kommt demnach auf die Elimination von m Grössen des ersten Grades zwischen $(m + 1)$ Gleichungen zurück. Bekanntlich kann in einem solchen Falle stets ein System von $(m + 1)$ Factoren 1, λ, $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(3)}$ ... $\lambda_{(m-1)}$ nachgewiesen werden, so beschaffen, dass, wenn man damit die gegebenen Gleichungen multiplicirt, und alsdann die resultirenden zusammen addirt, die gesuchte Endgleichung hervortritt. Da nun

$$\delta V = \left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dV}{dt}\right) dt + \left(\frac{dV}{du}\right)\delta u \ldots = o$$

$$\delta W = \left(\frac{dW}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dW}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dW}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dW}{du}\right)\delta u \ldots = o,$$

$$\delta W_{(1)} = \left(\frac{dW_{(1)}}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dW_{(1)}}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dW_{(1)}}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dW_{(1)}}{du}\right)\delta u \ldots = o,$$

$$\delta W_{(2)} + \left(\frac{dW_{(2)}}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dW_{(2)}}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dW_{(2)}}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dW_{(2)}}{du}\right)\delta u \ldots = o,$$

u. s. w.

$$\delta W_{(m-1)} = \left(\frac{dW_{(m-1)}}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dW_{(m-1)}}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dW_{(m-1)}}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dW_{(m-1)}}{du}\right)\delta u \ldots = o$$

ist; so hat man

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dV}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dV}{du}\right)\delta u + \ldots$$

$$+ \lambda\left(\frac{dW}{dy}\right)\delta y + \lambda\left(\frac{dW}{dz}\right)\delta z + \lambda\left(\frac{dW}{dt}\right)\delta t + \lambda\left(\frac{dW}{du}\right)\delta u + \ldots$$

$$+ \lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(2)}}{dy}\right)\delta y + \lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(1)}}{dz}\right)\delta z + \lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(1)}}{dt}\right)\delta t + \lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(1)}}{du}\right)\delta u + \ldots$$

$$+ \lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{dy}\right)\delta y + \lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{dz}\right)\delta z + \lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{dt}\right)\delta t + \lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{du}\right)\delta u + \ldots$$

u. s. w.

$$+ \lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{dy}\right)\delta y + \lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{dz}\right)\delta z + \lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{dt}\right)\delta t + \lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{du}\right)\delta u$$

$$= o. \quad (I.)$$

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, dass die m zu eliminirenden Grössen δt, δu ... seien, und obige Endgleich also bloss δy und δz enthalten müsse. Damit dieses statt finde, müssen die Factoren λ, $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$, $\lambda_{(3)}$ . . . $\lambda_{(m-1)}$ offenbar so beschaffen seyn, dass man habe

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dV}{dt}\right) + \lambda\left(\frac{dW}{dt}\right) + \lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(1)}}{dt}\right) + \lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{dt}\right) + \ldots \lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{dt}\right) = o, \\ \left(\frac{dV}{du}\right) + \lambda\left(\frac{dW}{du}\right) + \lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(1)}}{du}\right) + \lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{du}\right) + \ldots \lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{du}\right) = o, \end{array}\right\} (II.)$$

u. s. w.

welche Gleichungen, m an der Zahl, zur Bestimmung der m unbekannten Factoren dienen.

Dieses vorausgesetzt, reducirt sich die obige Gleichung auf

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\left(\frac{dV}{dy}\right)+\lambda\left(\frac{dW}{dy}\right)+\lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(1)}}{dy}\right)+\lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{dy}\right)+\ldots\lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{dy}\right)\right\}\delta y\\+\left\{\left(\frac{dV}{dz}\right)+\lambda\left(\frac{dW}{dz}\right)+\lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(1)}}{dz}\right)+\lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{dz}\right)+\ldots\lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{dz}\right)\right\}\delta z\end{array}\right\}=o,$$

welche, da sie unabhängig von δy und δz statt finden muss, die beiden folgenden verschafft:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dV}{dy}\right)+\lambda\left(\frac{dW}{dy}\right)+\lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(1)}}{dy}\right)+\lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{dy}\right)+\ldots\lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{dy}\right)=o,\\\left(\frac{dV}{dz}\right)+\lambda\left(\frac{dW}{dz}\right)+\lambda_{(1)}\left(\frac{dW_{(1)}}{dz}\right)+\lambda_{(2)}\left(\frac{dW_{(2)}}{dz}\right)+\ldots\lambda_{(m-1)}\left(\frac{dW_{(m-1)}}{dy}\right)=o,\end{array}\right\}\ (III)$$

wo λ, $\lambda_{(1)}$, $\lambda_{(2)}$ ... $\lambda_{(m-1)}$, vermittelst der Gleichungen *(II)*, bekannte Grössen sind. Anstatt aber diese Grössen durch das System *(II.)* zu bestimmen, und in *(III.)* zu substituiren, wird man sie auch allgemein vermittelst *(II.)* aus *(III.)* eliminiren können. Fügt man alsdann ferner zu den beiden Endgleichungen die m gegebenen Bedingungsgleichungen hinzu, so hat man wiederum $(m+2)$ Gleichungen zwischen eben so vielen Unbekannten, die dadurch also völlig bestimmt sind.

Die Regel, welche aus diesen Betrachtungen entspringt, lässt sich folgendermassen aussprechen: Wenn eine algebraische oder transcendente Funktion mehrerer relativ-unabhängigen Grössen ein Maximum oder ein Minimum seyn soll, und zwischen diesen Grössen eine oder mehrere Gleichungen vorhanden sind; so braucht man nur die Funktionen, welche, den gegebenen Gleichungen nach, Null gleich sind, nachdem man jede durch einen unbestimmten Factor multiplicirt hat, zu der Grösse, in deren Beziehung das Maximum oder Minimum gefragt wird, hinzu zu fügen, und alsdann in Hinsicht des resul-

tirenden Ausdruckes eben so zu verfahren, als wenn alle Grössen unabhängig von einander wären. Die hieraus entstehenden Gleichungen werden, nach der Elimination der unbestimmten Factoren, in Verbindung mit den gegebenen, zur Bestimmung aller Unbekannten hinreichen.

Obgleich wir bisjetzt nnr Eine der Grössen als absolut-unabhängig angesehen haben; so sieht man dennoch leicht, dass eine grössere Anzahl derselben keine wesentliche Veränderung erzeugt; weshalb es nicht nöthig seyn wird, hiebei besonders zu verweilen.

§. 40.

Die bisherigen Betrachtungen betrafen lediglich eine algebraische oder transcendente Funktion von den relativ-unabhängigen Grössen. Jetzt wollen wir zu dem Falle den Fortgang machen, wo die gegebene Grösse V von der Form

$$F\left\{ x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}; z \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}; t, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}, \ldots \frac{d^pt}{dx^p}, \ldots \right\}$$

ist, und solche Funktionen für $y, z, t \ldots$ in x verlangt werden, welche, für $x = x$, V zu einem Grössten odei Kleinsten machen.

Wenn die in V enthaltenen Grössen alle unabhängig von einander wären, so würde man hier nach der §. 34 dargestellten Methode verfahren können. Allein, obgleich $y, z, t \ldots$ als unabhängig von einander angesehen werden, so sind es dennoch nicht $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$; eben so wenig, als $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \ldots$; und $t, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}, \ldots$ Man würde also damit anfangen müssen, aus dem für V gegebenen Ausdrucke die abhängigen Grössen zu eliminiren. Da aber die dazu nöthigen

Relationen unbekannt bleiben, so lange nicht eine der Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$; wie auch eine der Grössen $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots$; u. s. w. als Funktion von x gegeben ist: so ist diese Elimination unmöglich. Inzwischen leuchtet es ein, dass, da die Bestimmung von $y, z, t \ldots$, in Funktionen von x, von eben so vielen Gleichungen abhängig ist, dem Uebelstande unter andern dadurch abgeholfen werden kann, dass von den $(m+1)$ Grössen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}$ einer Anzahl von m; von den $(n+1)$ Grössen $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}$ einer Anzahl von n; von den $(p+1)$ Grössen $t, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}, \ldots \frac{d^pt}{dx^p}$ einer Anzahl von p u. s. w., für $x = x$, bestimmte Werthe beigelegt werden. Die Aufgabe lautet alsdann: Unter allen Funktionen für $y, z, t \ldots$ in x, welche, für $x = x$, den gegebenen Bedingungen genügen, diejenigen zu finden, welche V, für eben den Werth von x, zu einem Maximum oder Minimum machen.

Bezeichnen wir durch $y, z, t \ldots$ und $y + k\delta y$, $z + k\delta z$, $t + k\delta t \ldots$, wo man sich überdiess, der grössern Allgemeinheit wegen, unter $\delta z, \delta t \ldots$ Grössen von der Form $\alpha f(x)$ vorstellen kann, zwei Systemen von Funktionen, welche jenen Bedingungen genügen, und betrachten wir das erste zugleich als dasjenige System, welches V zu einem Maximum oder Minimum macht; so hat man offenbar, für $x = x$,

$$1) \qquad \delta V = 0,$$

in Folge der Bedingung des Maximums und des Minimums; und

2) die Variationen der gegebenen Grössen einzeln gleich Null.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, dass ausser y, z, t, keine relativ-unabhängigen Grössen, independent von einander, in V vorhanden seien. Verbindet man daher die $(m + n + p)$ letzten Gleichungen mit der ersten, so werden in der Resultante drei Variationen zurückbleiben, unabhängig von welchen die Gleichung statt finden muss. Dieselbe wird also in eben so viele Differenzial-Gleichungen zerfallen, welche, allgemein zu reden, mit V von gleicher Ordnung seyn, und durch deren Integration die gefragten Funktionen gefunden werden. Die $(m + n + p)$ beliebigen Constanten, welche die Integral Gleichungen zusammen enthalten werden, werden offenbar durch die, für $x = x$, gegebenen Werthe jener $(m + n + p)$ Grössen bestimmt.

Dieses als vollführt gedacht, hat man ferner die Bedingung

$$\delta^2 V < o \text{ für das Maximum, und } > o \text{ für das Minimum,}$$

welche sich in die §. 36. näher entwickelten auflösst. Denkt man sich in diesen die für y, z, t gefundenen Werthe in x gesetzt; so ist es klar, dass für alle Werthe von x, diesen Bedingungen entsprechend, V ein Maximum oder ein Minimum, d. h. grösser oder kleiner seyn wird, als der unmittelbar vorhergehende und der unmittelbar folgende Werth, welche man für eben diese Werthe von x, aber bei veränderter Relation zwischen y, z, t und x erhält.

Auf eine, der des §'s. 37 vollkommen ähnliche Weise überzeugt man sich, dass, wenn überhaupt für Einen Werth von x ein Maximum oder Minimum statt findet, solches alsdann, allgemein zu reden, stets für ein gewisses Intervall, und oft für mehrere, durch gewisse Zwischenräume von einander getrennte, Intervalle von Werthen für x statt finden wird.

§. 41.

Um diesen Gegenstand durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir uns die Frage vorlegen: Unter allen Relationen zwischen y und x, welche, $x = x$ gesetzt, für y den Werth K geben, diejenige zu finden, vermöge welcher $\left\{y + \frac{dy}{dx}(m-x)\right\} \cdot \left\{y + \frac{dy}{dx}(n-x)\right\}$ ein Maximum oder Minimum wird.

Da in diesem Falle

$$V = \left\{y + \frac{dy}{dx}(m-x)\right\}\left\{y + \frac{dy}{dx}(n-x)\right\},$$

also ganz allgemein

$$\delta V = \left\{\delta y + \frac{d\delta y}{dx}(m-x)\right\}\left\{y + \frac{dy}{dx}(n-x)\right\} + \left\{\delta y + \frac{d\delta y}{dx}(n-x)\right\}\left\{y + \frac{dy}{dx}(m-x)\right\},$$

und, wegen $y = K$, $\delta y = o$ ist; so hat man, der allgemeinen Bedingung des Maximums und des Minimums gemäss,

$$(m-x)\left\{y + \frac{dy}{dx}(n-x)\right\} + (n-x)\left\{y + \frac{dy}{dx}(m-x)\right\} = o$$

oder, indem man die Producte entwickelt, den Ausdruck reducirt und mit dx multiplicirt,

$$\frac{dy}{y} = \frac{(2x-m-n)}{2(m-x)(n-x)}\, dx = \frac{dx}{2(x-m)} + \frac{dx}{2(x-n)}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt

$$2 \, Log \; y = Log \; (x-m) + Log \; (x-n) + Log \; C$$

oder

$$y^2 = C \; (x-m) \; (x-n),$$

wo die Constante C durch die Bedingung bestimmt wird, dass, für $x = x$, $y = K$ seyn muss.

Ferner hat man, da $\delta y = o$ ist,

$$\delta^2 V = 2(m-x)(n-x)\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right)^2,$$

welcher Ausdruck positiv seyn wird für alle Werthe von x, bei denen $(m-x)$ und $(n-x)$ gleiche, und negativ, bei denen sie verschiedene Zeichen erhalten. Daher wird für alle Werthe von x, welche zwischen den Grenzen m und n enthalten sind, ein Maximum, für alle übrigen hingegen ein Minimum statt finden.

Was den Werth von V anbelangt, so ist, da

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x-m-n}{2(m-x)(n-x)} \cdot y,$$

mithin
$$y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(m-x) = y\,\frac{(n-m)}{2(n-x)},$$

und
$$y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(n-x) = y\,\frac{(m-n)}{2(m-x)},$$

$$V = -\frac{C}{4}(m-n)^2,$$

also constant.

§. 42.

Wünscht man dieser rein formalen Frage eine geometrische Beziehung zu geben; so wird man sie, für den einen Theil, folgendermassen stellen können: Unter allen Curven, welche durch einen gegebenen Punkt, dessen Coordinaten x und y sind, gehen, diejenige zu finden, in welcher die an diesem Punkte gezogene Tangente, vor- *und* rückwärts verlängert, bis sie zwei auf der Axe errichteten, den Abcissen m und n entsprechenden Senkrechten trifft, auf diesen Stücke abschneide, deren Product ein *Maximum* ist.

Bekanntlich ist die Gleichung für die Tangente an einem Punkte einer Curve, dessen Coordinaten x' und y' sind,

$$y-y' = \frac{dy}{dx}(x-x'),$$

und die ihr angehörigen, den Abcissen m und n entsprechenden Ordinaten sind alsdann

$$\frac{dy}{dx}(m-x')+y', \quad \frac{dy}{dx}(n-x')+y'.$$

Man hat also, indem man x und y anstatt x' und y' setzt,

$$V=\left\{y+\frac{dy}{dx}(m-x)\right\}\left\{y+\frac{dy}{dx}(n-x)\right\},$$

von welchem Ausdrucke, der Bedingung des Maximums gemäss, die Variation δV, oder, indem y constant ist,

$$(m-x)\left\{y+\frac{dy}{dx}(n-x)\right\}+(n-x)\left\{y+\frac{dy}{dx}(m-x)\right\}=0$$

seyn muss; von welcher Differenzial-Gleichung die primitive

$$y^2 = C(x-m)(x-n)$$

ist, wo die Constante dergestalt bestimmt werden muss, dass, für $x=x$, $y=y$ werde, diese als besondere Werthe betrachtend.

Um diese Curve, die vom zweiten Grade ist, näher zu untersuchen, wollen wir den Anfangspunkt der Abcissen in den Punkt verlegen, dessen Abcisse gleich m und Ordinate gleich Null ist, und dieselben, von diesem Punkte aus, mit x' bezeichnen, so dass $x = x' + m$ ist. Da die Gleichung alsdann in

$$y^2 = -Cx'\{(n-m)-x\}$$

übergeht; so sieht man, dass die gesuchte Curve eine Ellipse ist, deren grosse Axe $(n-m)$, kleine Axe $(n-m)\sqrt{-C}$, und deren Scheitelpunkte den Abcissen m und n entsprechen.

Für den andern Theil wird die Frage folgendermassen lauten: Unter allen Curven, welche durch einen Punkt gehen, dessen Coordinaten x und y sind, diejenige zu finden, in welcher die an diesem Punkte gezogene Tangente, vor- *oder* rückwärts verlängert, bis sie zwei auf der Axe errichteten den Abcissen m und n entsprechenden Senkrechten trifft, von diesen Stücke abschneide, deren Product ein *Minimum* ist.

Auf eine, der vorigen vollkommen ähnliche Weise findet man

$$y^2 = C\,x'\left(x'-(n-m)\right),$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist, deren grosse Axe gleich $(n-m)$, deren kleine Axe aber gleich $(n-m)\sqrt{C}$ ist, und von welcher in den Endpunkten der grossen Axe die Senkrechten errichtet sind.

Die Curven des zweiten Grades haben demnach die Eigenschaft, nicht bloss, dass die Tagente eines jeden Punktes M von den, in den Endpunkten der Achse errichteten Senkrechten, Theile abschneidet, deren Product eine constante Grösse ist; sondern auch, dass dieses Product ein Maximum ist für die Ellipse, und ein Minimum für die Hyperbel, d. h. grösser und kleiner, als es die Tangente irgend einer andern, durch denselben Punkt M gehenden Curve zu thun vermag.

§. 43.

Wenn $V = \int F\left\{x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right\}$, wo x als absolut- und y als relativ-unabhängig betrachtet wird, gegeben ist; so ist es klar, dass der Werth der Grösse V von zwei Momenten abhängig

ist: erstlich von der Relation, die zwischen y und x statt findet, und zweitens von den Grenzen, zwischen welchen das Integral genommen wird. Wenn man daher, um mit dem einfacheren Falle anzuheben, die Grenzen als bestimmt und gegeben ansieht, und die Veränderlichkeit von V bloss auf die Veränderlichkeit der Relation zwischen y und x beschränkt; so kann offenbar die Frage nach derjenigen Relation zwischen y und x entstehen, vermöge welcher der entsprechende Werth von V ein Maximum oder ein Minimum, d. h. grösser oder kleiner werde, als der, aus einer allmähligen Veränderung dieser Relation entstehende, ihm unmittelbar vorhergehende und folgende Werth.

Es leuchtet ein, dass, wenn wir y als diejenige Funktion von x betrachten, die dieser Bedingung genügt, und den correspondirenden Werth von V mit V selbst bezeichnen; darauf y um $k\delta y$ zunehmen lassen, und den entsprechenden Werth von V mit $V_{(1)}$ bezeichnen, alsdann seyn wird:

$V_{(1)} < V$ für das Maximum und $> V$ für das Minimum, welche Funktion von x für δy und wie klein der Werth für k auch genommen werde. Denkt man sich daher $V_{(1)}$ nach ganzen und positiven Exponenten von k entwickelt, so hat man

$$V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots$$

$< V$ für das Maximum, und $> V$ für das Minimum; folglich

$$k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \ldots$$

$< o$ für das Maximum. und $> o$ für das Minimum, unabhäugig von k und δy.

Vermittelst einer, der im Vorhergehenden angewandten, vollkommen analogen Betrachtnng ergeben sich hieraus die beiden Bedingungen:

$$\delta V = o,$$

sowohl für das Maximum, als das Minimum;

$\delta^2 V < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum, unabhängig von δy, als Funktion von x betrachtet.

§. 43.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, dass der Werth des Integrals von $x = a$ bis $x = b$ ausgedehnt, oder, welches dasselbe sagt, für $x = b$ genommen werden solle, wenn man die Constante dergestalt bestimmt, dass derselbe für $x = o$ gleich Null werde.

Die Variation für diesen Werth von V verschafft uns also, in Folge des §'s. 24, indem wir daselbst δa, δb gleich Null setzen, die Gleichung

$$\int \delta y \left\{ Y + {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} \right\} dx$$

$$+ \delta y_{(2)} {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1} \overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-1}} + \frac{d\delta y_{(2)}}{db} {}^{2\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2} \overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}} + \frac{d^2 \delta y_{(2)}}{db^2} {}^{3\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-3} \overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-3}} + \ldots \mp \frac{d^{m-1} \delta y_{(2)}}{db^{m-1}} \overset{m}{Y}_{(2)}$$

$$- \delta y_{(1)} {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-1} \overset{r}{Y}_{(2)}}{da^{r-1}} - \frac{d\delta y_{(1)}}{da} {}^{2\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-2} \overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-2}} - \frac{d^2 \delta y_{(1)}}{da^2} {}^{3\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r-3} \overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-3}} - \ldots \pm \frac{d^{m-1} \delta y_{(1)}}{da^{m-1}} \overset{m}{Y}_{(1)}$$

$$= o, \quad (A)$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt; welche Gleichung unabhängig von δy statt hat.

Der Kürze wegen wollen wir diese Gleichung durch

$$\int \delta y \, \varphi(x) \, dx + \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o$$

darstellen, wo die Bedeutung von $\varphi(x)$, $\Omega_{(2)}$, $\Omega_{(1)}$ von selbst klar ist. Da diese Gleichung unabhängig von jeder besondern Form für δy statt findet; so wird sie auch für $\delta y = (x-a)^{m+p} \times (x-b)^{m+q}$ statt finden, wo p und q positive Zahlen von beliebiger Grösse bezeichnen. Da nun, unter dieser Voraussetzung, sowohl $\Omega_{(2)}$, als Ω gleich Null wird; so reducirt sich die obige Gleichung auf $\int \delta y \, \varphi(x) \, dx = o$. Die Bedingung also, dass jene Gleichung unabhängig von jeder besondern Form von δy statt findet, hat zur Folge, dass die Gleichungen

$$\int \delta y \, \varphi(x) \, dx = o, \quad \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o,$$

jede für sich, ebenfalls unabhängig von δy statt haben.

Nun fühlt man leicht, dass die Gleichung

$$\int \delta y \, \varphi(x) \, dx = o,$$

von $x = a$ bis $x = b$, nicht unabhängig von δy statt finden kann, wenn nicht $\varphi(x) = o$ ist. Denn, wäre dieses nicht der Fall, so würde es erlaubt seyn, $\delta y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ zu setzen, wo $f(x)$ eine ganz beliebige Funktion von x bezeichnet; die Gleichung würde alsdann übergehen in $\int f(x) \, dx = o$, das Integral von $x = b$ bis $x = b$ genommen; welches offenbar ungereimt ist. Die Gleichung (A) zerfällt demnach zuförderst in

$$\varphi(x) = o, \quad \text{und } \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o,$$

von denen die erste die allgemeine Gleichung des Maximums oder des Minimums, und die zweite die Gleichung für die Grenzen, oder Grenzgleichung, genannt wird.

Die Grenzgleichung aber wird, weil sie unabhängig von δy statt hat, noch statt finden, wenn man $\delta y = (x-a)^{m+p}$ setzt. Da nun unter dieser Voraussetzung $\Omega_{(1)}$ gleich Null wird; so zerfällt dieselbe in

$$\Omega_{(1)} = o, \; \Omega_{(2)} = o,$$

von denen die erste sich auf den Anfang, und die zweite sich auf das Ende des Integrals bezieht.

Substituirt man nun für $\Omega_{(1)}$ und $\Omega_{(2)}$ die Werthe aus *(A)*, und setzt darin das beliebige δy, nach und nach, gleich *Const.*, x, x^2, x^3 u. s. w.; so erhält man

$$\delta y_{(1)}\,{}^{\overset{r}{1\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-1}} = o,\; \delta y_{(1)}\,{}^{\overset{r}{1\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-1}} + \frac{d\delta y_{(1)}}{da}\,{}^{\overset{r}{2\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-2}} = o, \text{ u. s. w.}$$

$$\delta y_{(2)}\,{}^{\overset{r}{1\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-1}} = o,\; \delta y_{(2)}\,{}^{\overset{r}{1\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-1}} + \frac{d\delta y_{(2)}}{db}\,{}^{\overset{r}{2\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}} = o, \text{ u. s. w.}$$

aus welchen beiden Systemen von Gleichungen sich, durch Subtraction der ersten Gleichung von der zweiten, der zweiten von der dritten, der dritten von der vierten u. s. w. die folgenden ergeben:

$$\delta y_{(1)}\,{}^{\overset{r}{1\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-1}} = o, \qquad \delta y_{(2)}\,{}^{\overset{r}{1\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-1}} = o,$$

$$\frac{d\delta y_{(1)}}{da}\,{}^{\overset{r}{2\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-2}} = o, \qquad \frac{d\delta y_{(2)}}{db}\,{}^{\overset{r}{2\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}} = o,$$

$$\frac{d^2\delta y_{(1)}}{da^2}\,{}^{\overset{r}{3\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-3}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-3}} = o, \qquad \frac{d^2\delta y_{(2)}}{db^2}\,{}^{\overset{r}{3\ldots m}}\Sigma \mp \frac{d^{r-3}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}} = o,$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{d^{m-1}\delta y_{(1)}}{da^{m-1}}\overset{m}{Y}_{(1)} = o \qquad \frac{d^{m-1}\delta y_{(2)}}{db^{m-1}}\overset{m}{Y}_{(2)} = o$$

welche, $2m$ an der Zahl, ebenfalls unabhängig von δy statt finden; was offenbar nicht geschehen kann, wenn nicht die Coefficienten der Variationen $\delta y_{(1)}$, $\delta y_{(2)}$ $\frac{d\delta y_{(1)}}{da}$, $\frac{d\delta y_{(2)}}{db}$, u. s. w. einzeln gleich Null sind.

Die Gleichung (A), so fern sie unabhängig von jeder besondern Form von δy statt findet, zerfällt demnach erstlich in die allgemeine Gleichung des Maximums oder des Minimums

$$Y + \overset{r}{\underset{1..m}{\Sigma}} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} = o;$$

und zweitens in die Grenzgleichungen

$$\overset{r}{\underset{1..m}{\Sigma}} \mp \frac{d^{r-1} \overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-1}} = o, \quad \overset{r}{\underset{2..m}{\Sigma}} \mp \frac{d^{r-2} \overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-2}} = o, \quad \overset{r}{\underset{3..m}{\Sigma}} \mp \frac{d^{r-3} \overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-3}} = o, \dots \overset{m}{Y}_{(1)} = o;$$

$$\overset{r}{\underset{1..m}{\Sigma}} \mp \frac{d^{r-1} \overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-1}} = o, \quad \overset{r}{\underset{2..m}{\Sigma}} \mp \frac{d^{r-2} \overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}} = o, \quad \overset{r}{\underset{3..m}{\Sigma}} \mp \frac{d^{r-3} \overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-3}} = o, \dots \overset{m}{Y}_{(2)} = o;$$

§. 45.

Diesem nach kommt die Bestimmung des Werthes von y, einem Maximum oder Minimum entsprechend, zunächst auf die Entwickelung eines Werthes für diese Grösse zurück, vermöge dessen den obigen $2m+1$ Gleichungen Genüge geleistet werde. Der Bemerkung des §. 24 gemäss, wird die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums, welche, in entwickelter Gestalt geschrieben, die Form

$$Y - \frac{d\overset{1}{Y}}{dx} + \frac{d^2 \overset{2}{Y}}{dx^2} - \frac{d^3 \overset{3}{Y}}{dx^3} + \frac{d^4 \overset{4}{Y}}{dx^4} \dots \pm \frac{d^m \overset{m}{Y}}{dx^m} = o$$

annimmt, im Allgemeinen eine Differenzial - Gleichung von der $2m^{ten}$ Ordnung seyn, deren primitive also $2m$ beliebige Constanten enthalten wird. Denkt man sich diese Relation als gefunden, und vermittelst deren y und dessen Differenzial Coefficienten aus den Grenzgleichungen eliminirt, so wird man eine Anzahl von $2m$ Gleichungen zwischen den Grenzwerthen von x, a und b nehmlich, und jenen Constanten erhalten, denen also durch diese wird Genüge geschehen können, wenn es überhaupt einen Werth für y giebt, den Bedingungen des geforderten Maximums oder Minimums entsprechend.

Dass aber die Möglichkeit hievon an die besondere Form des Integral-Ausdrucks sehr gebunden und keinesweges, was sich vielleicht aus der Uebereinstimmung der Anzahl der vorhandenen Gleichungen mit der der unbestimmten Grössen bei einer oberflächlichen Betrachtung vermuthen liesse, allgemein ist, leuchtet ein, sobald man nur einen Blick auf die allgemeine Gestalt der sich ergebenden Grenzgleichungen wirft. Denn bezeichnet man die $2m$ beliebigen Constanten mit $C_{(1)}$, $C_{(2)}$, $C_{(3)}$, . . . $C_{(2m)}$, und die Grenzwerthe für x mit a und b; so erlangt man offenbar folgende Formen

$$\Psi_{(1)}\{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)} \ldots C_{(2m)}, a\}=o, \quad \Psi_{(2)}\{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)} \ldots C_{(2m)}, a\}=o,$$

$$\Psi_{(3)}\{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)} \ldots C_{(2m)}, a\}=o, \ldots \Psi_{(m)}\{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)} \ldots C_{(2m)}, a\}=o,$$

$$\Psi_{(1)}\{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)} \ldots C_{(2m)}, b\}=o, \quad \Psi_{(2)}\{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)} \ldots C_{(2m)}, b\}=o,$$

$$\Psi_{(3)}\{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)} \ldots C_{(2m)}, b\}=o, \ldots \Psi_{(m)}\{C_{(1)}, C_{(2)}, C_{(3)} \ldots C_{(2m)}, b\}=o.$$

Aber gesetzt auch, dass die Möglichkeit der in Rede stehenden Bestimmung im Allgemeinen vorhanden wäre; so würde sie dennoch mannigfaltige Ausnahmen leiden, indem, nach der Bemerkung des so eben erwähnten §'s, die Anzahl der Grenzgleichungen stets $2m$ seyn

wird, während die Differenzial-Gleichung, nach Massgabe der Form des gegebenen Integral-Ausdrucks, von einer niedrigern Ordnung, mithin die Anzahl der beliebigen Constanten weniger, als $2m$ seyn kann, in welchem Falle, allgemein zu reden, mehr Gleichungen, als unbekannte Grössen vorhanden seyn werden. Ein Gleiches wird, im Allgemeinen, statt finden, wenn der vorgegebene Integral-Ausdruck, und mithin auch die Grenzgleichungen, es sey bloss von y, oder zugleich von mehrern der niedrigsten Differenzial-Coefficienten, unabhängig sind, indem sie alsdann auch unabhängig von den betreffenden Constanten seyn werden. Freilich wird auch der Fall eintreten können, dass durch die Substitution des Werthes von y in Ω, so fern man unter diesem Zeichen den allgemeinen Ausdruck versteht, dessen Werth von $x=a$ bis $x=b$ durch $\Omega_{(2)} - \Omega_{(1)}$ repräsentirt wird, der Coefficient von einer der Variationen unabhängig von x wird, wodurch sich zwei gleichlautende Grenzgleichungen ergeben werden.

§. 46.

Die Relation zwischen y und x als bestimmt vorausgesetzt, hat man noch die Bedingung

$\delta^2 V < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimnm, unabhängig von δy.

Da nun, $V = \int W \mathrm{d}x$, von $x=a$ bis $x=b$, setzend, nach §. 16,

$$\delta^2 V = \int \delta^2 W \mathrm{d}x,$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ genommen, ist; so hat man, nach §. 7. in Verbindung mit der Bemerkung des §. 21,

$$\delta^2 V = \int \mathrm{d}x \left\{ \left(\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}y^2}\right)\delta y^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y'}\right)\delta y.\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}y'^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y''}\right)\delta y.\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2} + 2\left(\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y''}\right)\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}y''^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + \ldots \right\},$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Denkt man sich in diesem Ausdrucke anstatt y, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ u. s. w. ihre, aus der obigen Bestimmung hervorgegangenen Werthe in x gesetzt, so wird derselbe übergehen in

$$\int \mathrm{d}x \left\{ A\delta y^2 + B\delta y.\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + C\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + D\delta y.\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2} + E\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2} + F\left(\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + \ldots \right\}$$

wo A, B, C . . . bestimmte Funktionen von x sind; dessen Betrag also, von $x = a$ bis $x = b$, unabhängig von δy

$< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum

seyn muss.

Bekanntlich ist das Zeichen des Werthes eines Integrals, zwischen gegebenen Grenzen genommen, identisch mit dem Zeichen des Werthes des Differenzial-Coefficienten, so fern dieser, innerhalb desselben Intervals, weder von Zeichen verändert, noch unendlich wird.

Es wird daher $\delta^2 V$, unabhängig von der Form von δy, positiv seyn, wenn die Grösse

$$A\delta y^2 + B\delta y.\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + C\left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + D\delta y.\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2} + E\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}.\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2} + F\left(\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + \ldots$$

von $x = a$ bis $x = b$, so fern sie nicht unendlich wird, unabhängig von δy, $\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2}$ u. s. w. beständig positiv; negativ hingegen, wenn diese Grösse, unter denselben Bedingungen, beständig negativ ist.

Sind daher A, B, C ... als Funktionen von x, so beschaffen, dass sie Einer von den, §. 34 in dieser Beziehung entwickelten Bedingungen, für alle, zwischen a und b enthaltenen Werthe von x genügen, und nicht unendlich werden, so ist die Frage entschieden. Ist dieses aber nicht der Fall, so wird man das obige Differenzial in zwei Theile zerlegen müssen, von denen der eine, unabhängig von δy, integrabel sei, und der andere eine von jenen Bedingungen erfülle. Es sei zu diesem Ende

$$\int dx\left\{A\delta y^2 + B\delta y.\frac{d\delta y}{dx} + C\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + D\delta y.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + E\frac{d\delta y}{dx}.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + F\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) + \ldots\right\}$$

$$= \alpha + \beta\delta y^2 + \gamma\delta y.\frac{d\delta y}{dx} + \varepsilon\left(\frac{d\delta y}{dx}\right) + \ldots$$

$$+ \int dx\left\{M\delta y^2 + N\delta y.\frac{d\delta y}{dx} + P\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + Q\delta y.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d\delta y}{dx}.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + S\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) + \ldots\right\}$$

Differenziirt man diese Gleichung, so kommt

$$\frac{d\alpha}{dx} = o,\ \frac{d\beta}{dx} = A - M,\ 2\beta + \frac{d\gamma}{dx} = B - N,\ \gamma + \frac{d\varepsilon}{dx} = C - P,$$

$$\gamma = D - Q,\ 2\varepsilon = E - R,\ o = F - S, \text{ u. s. w.};$$

woraus sich also ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= Const. \\ M &= A - \frac{d\beta}{dx} \\ N &= B - 2\beta - \frac{d\gamma}{dx} \\ P &= C - \gamma - \frac{d\varepsilon}{dx} \\ Q &= D - \gamma \\ R &= E - 2\varepsilon \\ S &= F. \qquad \text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} (I.)$$

Da β, γ, ε ... beliebig sind, so wird man sie dergestalt nehmen könnnn, dass die Grössen M, N, P ... den Bedingungen entsprechen, unter welchen der Ausdruck

$$M\delta y^2 + N\delta y.\frac{d\delta y}{dx} + P\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + Q\delta y.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d\delta y}{dx}.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + S\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) + \ldots$$

für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$, unabhängig von δy, positiv oder negativ werde. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wirannehmen, dass in W kein höherer Differenzial-Coefficient von y, als der der zweiten Ordnung enthalten sei. Setzt man alsdann

$$\frac{d^2\delta y}{dx^2} = p, \frac{d\delta y}{dx} = q, \delta y = r,$$

so geht dieser Ausdruck über in

$$Sp^2 + Rpq + Pq^2 + Qpr + Nqr + Mr^2,$$

wo, indem man denselben mit dem des §. 35 vergleicht,

$$\left.\begin{aligned} f &= S, \\ g &= P - \frac{R^2}{4f}, \\ h &= M - \frac{Q^2}{4f} - \frac{\left(N - \frac{QR}{2f}\right)^2}{4g} \end{aligned}\right\} (II.)$$

ist; oder, M, N, P ... vermittelst obiger Gleichungen eliminirend,

$$f = F,$$

$$g = C - \gamma - \frac{d\varepsilon}{dx} - \frac{(E - 2\varepsilon)^2}{4f},$$

$$h = A - \frac{d\beta}{dx} - \frac{(D - \gamma)^2}{4f} - \frac{\left\{B - 2\beta - \frac{d\gamma}{dx} - (E - 2\varepsilon)(D - \gamma)\right\}^2}{4g},$$

von welchen Grössen also, damit für $M, N, P\ldots$ die besagten Bedingungen statt finden, für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$,

$$f < \text{ oder } > o,$$

und zugleich g, h nicht $>$ oder $<$ o,

seyn müssen.

Bestimmt man daher β, γ, ε, dergestalt, dass man habe

$$g=o, \quad h=o, \quad (III.)$$

so wird das Zeichen von

$$M\delta y^2 + N\delta y.\frac{d\delta y}{dx} + P\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + Q\delta y.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + R\frac{d\delta y}{dx}.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + S\left(\frac{d^2\delta y}{dx}\right)^2$$

mit dem von F identisch seyn.

Ferner hat man

$$^2V = \int dx \left\{ M\delta y^2 + N\delta y.\frac{d\delta y}{dx} + P\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + Q\delta y.\frac{d^2\delta y}{dx} + R\frac{d\delta y}{dx}.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + S\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \right\}$$

$$+ \beta_{(2)}\delta y^2_{(1)} + \gamma_{(2)}\delta y_{(2)}\frac{d\delta y_{(2)}}{db} + \varepsilon_{(2)}\left(\frac{d\delta y_{(2)}}{db}\right)^2.$$

$$- \beta_{(1)}\delta y^2_{(1)} - \gamma_{(1)}\delta y_{(1)}\frac{d\delta y_{(1)}}{da} - \varepsilon_{(1)}\left(\frac{d\delta y}{da}\right)^2.$$

Da nun, vermöge der obigen Gleichungen (III.), Eine von den Grössen β, γ, ε beliebig bleibt, und die beiden übrigen, da sie durch Differenzial-Gleichungen von der ersten Ordnung gegeben sind, zwei willkührliche Constanten enthalten; so ist es klar, dass man diese, nach Massgabe des jedesmaligen Werthes von δy, dergestalt wird bestimmen können, dass das Zeichen des, von dem Integrationszeichen befreiten Theiles im obigen Ausdruck, nach Belieben, positiv

oder negativ werde. Die obige Bedingung kommt demnach auf diese zurück:

$$\int dx \left\{ M\delta y^2 + N\delta y . \frac{d\delta y}{dx} + P\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + Q\delta y . \frac{d^2\delta y}{dx} + R\frac{d\delta y}{dx} . \frac{d^2\delta y}{dx^2} + S\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \right\}$$

von $x = a$ bis $x = b$, unabhängig von δy

$< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum,

welche, dem Vorhergehenden gemäss, wiederum zu der folgenden führt:

$$S = F = \left(\frac{d^2 W}{dy''^2}\right) = \left(\frac{d^2 \frac{dV}{dx}}{dy''^2}\right),$$

für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$, $< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum, so fern M, N, P . . ., für eben diese Werthe von x, nicht unendlich werden.

Wir haben zwar angenommen, dass W keinen höhern Differenzial-Coefficienten, als den der zweiten Ordnung enthalte. Man überzeugt sich aber sehr leicht, dass, im Falle eines höhern Differenzial-Quotienten, das Resultat dem vorigen vollkommen analog ausfällt, und dass man, $\frac{d^m y}{dx^m} = y^{(m)}$ als den höchsten der vorhandenen betrachtend, ganz allgemein hat:

$\left(\frac{d^2 W}{dy^{(m)2}}\right) < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum,

für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$, so fern, innerhalb eben dieser Grenzen, M, N, P . . . nicht unendlich werden. Denn offenbar wird die Variation der zweiten Ordnung von W, so fern $\frac{d^m y}{dx^m}$ den höch-

sten der vorhandenen Differenzial-Coefficienten ausmacht, ausser dem Gliede, welches $\left(\frac{d^m \delta y}{dx^m}\right)^2$ enthält, im Allgemeinen noch $\frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}-1$ andere Glieder enthalten, deren Zahl der Anzahl der zu bestimmenden Grössen M, N, P u. s. w. gleich ist. Nun wird der von dem Integrations Zeichen befreite Theil aus $\frac{m.(m+1)}{1. \; 2}$ Gliedern bestehen, und dadurch eben so viele von den Gleichungen (*I.*) liefern. Die Gleichungen (*II.*) in Verbindung mit (*III.*) werden noch m andere Gleichungen abgeben. Man hat daher zur Bestimmung jener $\frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}-1$ Grössen eine Anzahl von $\frac{m.(m+1)}{1 \cdot 2}+m=\frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}-1$ Gleichungen, welche, da die folgende eine Grösse enthält, die in der vorhergehenden nicht vorhanden ist, weder in einander enthalten sind, noch miteinander in Widerspruch stehen werden.

Die Bedingung, dass M, N, P u. s. w. für alle zwischen a und b enthaltenen Werthe von x nicht unendlich werden dürfen, kann die Anwendung dieses Criteriums sehr erschweren; nachdem, um sich von der Erfüllung dieser Bedingung zu versichern, die Gleichungen $g=o$, $h=o$ . . . integrirt werden müssen, welches bekanntlich, nach Massgabe der Umstände, unübersteiglichen Hindernissnn unterworfen seyn kann.

Im Falle $\left(\frac{d^2 W}{dy^{(m)2}}\right)$, von $x=a$ bis $x=a$, nicht durchgehends mit demselben Zeichen behaftet, sondern für ein gewisses Intervall, z. B. von $x=a$ bis $x=a'$, positiv, und für das folgende, von $x=a'$ bis $x=b$, negativ wäre; so würde daraus hervorgehen, dass das Maximum und Minimum zugleich an die Grenzwerthe von x gebunden, und

von $x=a$ bis $x=a'$ ein Minimum, so wie von $x=a'$ bis $x=b$ ein Maximum vorhanden wäre.

Sollte es endlich der Fall seyn, dass $\left(\frac{d^2 W}{dy^{(m)2}}\right)$ gleich Null wäre; so würde dieses offenbar anzeigen, dass weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden sei. In diesem Falle wäre $\delta^2 W$ in Beziehung auf $\frac{d^m \delta y}{dx^m}$ vom ersten Grade, und von der Form

$$\int \Psi\left\{x, \delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \frac{d^3\delta y}{dx^3}, \ldots \frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}}\right\} dx$$

$$\int + \left\{\begin{array}{l} X^{(0)}\delta y . \frac{d^m \delta y}{dx^m} + X^{(1)}\frac{d\delta y}{dx} . \frac{d^m \delta y}{dx^m} + X^{(2)}\frac{d^2\delta y}{dx^2} . \frac{d^m \delta y}{dx^m} \\ + X^{(3)}\frac{d^3\delta y}{dx^3} . \frac{d^m \delta y}{dx^m} \ldots + X^{(m-1)}\frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}}\frac{d^m \delta y}{dx^m} \end{array}\right\} dx,$$

welche, vermittelst einer theilweisen Integration des zweiten Gliedes sogleich auf die Form

$$\int \Psi_{(1)}\left\{x, \delta y, \frac{d\delta y}{dx}, \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \frac{d^3\delta y}{dx^3}, \ldots \frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}}\right\} dx$$

$$+ X^{(0)}\delta y \frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}} + X^{(1)}\frac{d\delta y}{dx} . \frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}} + X^{(2)}\frac{d^2\delta y}{dx^2} . \frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}}$$

$$+ X^{(3)}\frac{d^3\delta y}{dx^3} . \frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}} \ldots + X^{(m-1)}\left(\frac{d^{m-1}\delta y}{dx^{m-1}}\right)$$

zurückgebracht wird.

§. 47.

Im Vorhergehenden betrachteten wir die Variation δy als vollkommen beliebig und durch keine Bedingung irgend einer Art näher bestimmt. Diese Unbestimmtheit von δy folgte aus der Aufgabe, die unter *allen* Relationen zwischen y und x diejenige verlangte, welche V zu einem Maximum oder Minimum mache. Inzwischen leuchtet es ein, dass in dieser Beziehung mannigfaltige Beschränkungen statt finden können, entspringend aus den Bedingungen, welchen man die Relationen, zwischen denen die des Maximums oder Minimums verlangt wird, unterwerfen kann. Von diesen verdienen hier solche vorzugsweise näher betrachtet zu werden, die jene Relationen durch Bedingungen characterisiren, welche sich lediglich auf die Grenzwerthe von x, a und b, beziehen. Die allgemeine Aufgabe für diesen Fall kann folgendermassen ausgesprochen werden. Unter allen Relationen zwischen y und x, welche, für $x=a$ und $x=b$, den Gleichungen

$$\Psi\left\{a, y_{(1)} \frac{dy_{(1)}}{da}, \frac{d^2 y_{(1)}}{da^2}, \ldots \frac{d^{m-1} y_{(1)}}{da^{m-1}};\ b, y_{(2)}, \frac{dy_{(2)}}{db}, \frac{d^2 y_{(2)}}{db^2}, \ldots \frac{d^{m-1} y_{(2)}}{db^{m-1}}\right\} = o,$$

$$\Psi_{(1)}\left\{a, y_{(1)}, \frac{dy_{(1)}}{da}, \frac{d^2 y_{(1)}}{da^2}, \ldots \frac{d^{m-1} y_{(1)}}{da^{m-1}};\ b, y_{(2)}, \frac{dy_{(2)}}{db}, \frac{d^2 y}{db^2}, \ldots \frac{d^{m-1} y_{(2)}}{db^{m-1}}\right\} = o,$$

$$\Psi_{(2)}\left\{a, y_{(1)}, \frac{dy_{(1)}}{da}, \frac{d^2 y_{(1)}}{da^2}, \ldots \frac{d^{m-1} y_{(1)}}{da^{m-1}};\ b, y_{(2)}, \frac{dy_{(2)}}{db}, \frac{d^2 y}{db^2}, \ldots \frac{d^{m-1} y_{(2)}}{db^{m-1}}\right\} = o,$$

u. s. w.

wo die Zeichen Ψ, $\Psi_{(1)}$, $\Psi_{(2)}$ ... algebraische oder transcendente Funktionen von den sich unter denselben befindenden Grössen bezeichnen, genügen, diejenige zu finden, welche

$$V = \int F\left\{x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right\} dx,$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt, zu einem Meximum oder Minimum mache.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, dass die beiden Funktionen y und $y+k\delta y$, unabhängig von k, jene Bedingungen erfüllen, und erstere zugleich als diejenige betrachten, welche V zu einem Maximum oder Minimum macht. Alsdann ist es einleuchtend, dass, in Folge der Bedingung des Maximums und des Minimums, die Gleichung (A) des §'s 43, die wir, der Kürze halber, durch

$$\int \delta y\, \varphi(x)\, dx + \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o$$

darstellen wollen, hier ebenfalls statt finden wird, jedoch nicht unabhängig von jeder besondern Form von δy, sondern mit Rücksicht auf die Beschränkungen, die für diese Grösse aus den gegebenen Bedingungsgleichungen entspringen. Inzwischen lässt es sich leicht zeigen, dass, wie auch die Bedingungen mit Beziehung auf die Grenzen beschaffen seien, jene Gleichung stets in diese zwei

$$\varphi(x) = o, \quad \text{und } \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o,$$

zerfällt. Denn, da $f(x) \times (x-a)^{m+p} \times (x-b)^{m+q}$, wo $f(x)$ eine beliebige, $(x-a)$ und $(x-b)$ jedoch nicht als Divisor enthaltende, Funktion von x, und p und q beliebige positive Zahlen bedeuten, so wohl für $x=a$, als $x=b$, gleich Null wird; so wird, wenn δy die geforderten Bedingungen mit Beziehung auf die Grenzen wirklich erfüllt, $\delta y + f(x)(x-a)^{m+p}(x-b)^{m+q}$ denselben ebenfalls entsprechen. Substituirt man daher diese Form anstatt δy in der Gleichung

$$\int \delta y\, \varphi(x)\, dx + \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o,$$

so erhält man

$$\int \delta y\, \varphi(x)\, dx + \int f(x) \times \varphi(x)(x-a)^{m+p} \times (x-b)^{m+q}\, dx + \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o;$$

folglich, indem man beide mit einander verbindet,

$$\int f(x) \times \varphi(x)(x-a)^{m+p} \times (x-b)^{m+q}\, dx = o,$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ genommen.

Im Falle nun auch $\varphi(x)$ die Formen $(x-a)$ und $(x-b)$ mehreremale als Divisoren enthalten sollte, so würde man diese doch, wegen des beliebigen p und q, heben, und die obige Gleichung auf die Form

$$\int f(x) \times \xi(x)\, x-a)^{m+p} \times (x-b)^{m+q}\, dx = o,$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt, zurückführen können, wo $\xi(x)$ von $(x-a)$ und $(x-b)$ frei ist.

Jetzt aber fühlt man leicht, dass diese Gleichung nicht statt finden kann, wenn nicht identisch $\xi(x) = o$ ist. Denn, wäre dieses nicht der Fall, so würde es erlaubt seyn, $f(x) = \frac{1}{\xi(x)}$ zu setzen, wodurch jene Gleichung in

$$\int (x-a)^{m+p} \times (x-b)^{m+q}\, dx = o,$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ genommen, übergehen würde, welches ungereimt ist.

Da also $\xi(x) = o$ ist; so ist auch

$$\varphi(x) = o, \ (I.), \text{ und } \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o, \ (II.)$$

welche zwei Gleichungen einzeln bestehen, wie auch die Bedingungen hinsichtlich der Grenzen beschaffen seyn mögen.

Die Gleichung (I) ist offenbar identisch mit derjenigen, welche §. 43 die allgemeine Gleichung des Maximums und des Minimums genannt worden ist, und, allgemein zu reden, eine Differenzial-Gleichung von der $2m^{\text{ten}}$ Ordnung, von deren primitiver Gleichung die

$2m$ beliebigen Constanten durch die Grenzgleichung, in Verbindung mit den gegebenen Bedingungsgleichungen ihre Bestimmung erhalten.

§. 48.

Es sei nun

$$\Psi \left\{a, y_{(1)}, \frac{dy_{(1)}}{da}, \frac{d^2y_{(1)}}{da^2}, \dots \frac{d^{m-1}y_{(1)}}{da^{m-1}}; b, y_{(2)}, \frac{dy_{(2)}}{db}, \frac{d^2y_{(2)}}{db^2}, \dots \frac{d^{m-1}y_{(2)}}{db^{m-1}}\right\} = o,$$

die wir, der Kürze halber, durch $W^{(1)} = o$ ausdrucken wollen, eine der Bedingungsgleichungen, denen die Relationen zwischen y und x, unter welchen die des Maximums oder des Minimums gesucht wird, für $x = a$ und $x = b$, zu genügen haben.

Da wir y und $y + k\delta y$, unabhängig von k, als diese Bedingung erfüllend betrachten; so ist offenbar

$$W^{(1)} + k\delta W^{(1)} + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 W^{(1)} + \text{u. s. w.} = o,$$

mithin

$$W^{(1)} = o, \ \delta W^{(1)} = o, \ \delta^2 W^{(1)} = o \ \text{u. s. w.}$$

Dasselbe wird der Fall mit den übrigen Bedingungsgleichungen

$$W^{(2)} = o, \ W^{(3)} = o, \ W^{(4)} = o \ \text{u. s. w.}$$

seyn: sie werden die variirten Gleichungen

$$\delta W^{(2)} = o, \ \ \delta W^{(3)} = o, \ \ \delta W^{(4)} = o \ \text{u. s. w.}$$

verschaffen, von denen jede eine Relation zwischen $\delta y_{(1)}, \frac{d\delta y_{(1)}}{da}, \frac{d^2\delta y_{(1)}}{da^2}, \dots;$ $\delta y_{(2)}, \frac{d\delta y_{(2)}}{db}, \frac{d^2\delta y_{(2)}}{db^2}, \dots$ enthält.

Um die Begriffe zu fixiren wollen wir annehmen, dass die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen, die offenbar $2m$ nicht übersteigen

darf, gleich r sei. Ihre variirten Gleichungen der ersten Ordnung werden uns alsdann r Relationen zwischen den $2m$ Variationen verschaffen, vermittelst welcher aus der Gleichung für die Grenzen

$$\Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o$$

eben so viele von diesen Grössen eliminirt werden können.

Die resultirende Gleichung, welche, unabhängig von den $(2m-r)$ zurückbleibenden Variationen gleich Null seyn muss, wird sich alsdann in $(2m-r)$ besondere auflösen, die man erhält, wenn man die Coefficienten der Variationen einzeln gleich Null setzt, und welche, in Verbindung mit den r gegebenen Gleichungen, zur Bestimmung der $2m$ Constanten dienen werden.

Ist $r = 2m$, d. h. beträgt die Anzahl der gegebenen Bedingungsgleichungen $2m$, so sind die Grössen $y_{(1)}$ $\frac{dy_{(1)}}{da}, \frac{d^2y_{(1)}}{da^2}, \ldots \frac{d^{m-1}y_{(1)}}{da^{m-1}}$; $y_{(2)}, \frac{dy_{(2)}}{db}, \frac{d^2y_{(2)}}{db^2}, \ldots \frac{d^{m-1}y_{(2)}}{db^{m-1}}$ alle bestimmt, und in a und b gegeben, mithin ihre Variationen gleich Null. Der Grenzgleichung

$$\Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o$$

geschieht alsdann schon in Folge dieser Bedingungen Genüge, und die $2m$ Constanten werden allein durch die $2m$ gegebenen Gleichungen bestimmt.

Aus diesem Allen geht hinlänglich hervor, dass, wie auch die Bedingungen mit Beziehung auf die Grenzen, innerhalb welcher das Integral genommen werden soll, lauten mögen, die Frage, allgemein zu reden, der Form nach bestimmt ist, so bald nur die Gleichungen, der Zahl nach, $2m$ nicht übersteigend, von der obigen Form sind.

Anders verhält es sich inzwischen, wenn eine der Bedingungsgleichungen von der Form

$$\Psi\left\{\delta y_{(1)}, \frac{d\delta y_{(1)}}{da}, \frac{d^2\delta y_{(1)}}{da^2}, \ldots; \delta y_{(2)}, \frac{d\delta y_{(2)}}{db}, \frac{d^2\delta y_{(2)}}{db^2}, \ldots\right\} = o,$$

d. h. unmittelbar zwischen den Variationen gegeben wäre. In diesem Falle nehmlich würde man die Gleichung, welche vermöge der Elimination von einer der Variationen aus (*II.*) wegfällt, durch keine andere ersetzen, mithin auch eine der Constanten nicht bestimmen können. Uebrigens finden die in §. 45 gemachten Bemerkungen auch hier ihre Anwendung.

Was die Elimination der durch die Bedingungsgleichungen gegebenen Variationen aus der Grenzgleichung anbelangt, so wird man dabei die in §. 39 dargestellten Methode befolgen können. Hiernach wird man die Grössen $\delta W^{(1)}$, $\delta W^{(2)}$, $\delta W^{(3)}$ . . . , jede mit einem unbestimmten Factor $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ . . . multiplicirt, zu der Gleichung (*II.*) hinzu zu addiren, und in der Resultante die Coefficienten der Variationen einzeln gleich Null zu setzen haben.

Die Bestimmung von y als völlig geleistet betrachtet, hat man noch die Bedingung

$\delta^2 V < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum,

mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen

$$W^{(1)} = o, \; W^{(2)} = o, \; W^{(3)} = o, \text{ u. s. w.}$$

welche auch, dem Vorhergehenden nach, durch

$$\delta^2 V + \lambda^{(1)} \delta^2 W^{(1)} + \lambda^{(2)} \delta^2 W^{(2)} + \lambda^{(3)} \delta^2 W^{(3)} + \ldots$$

unabhängig von δy, $< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum, ausgedrückt werden kann; und es ist leicht zu sehen, dass das Criterium in diesem Falle mit dem des vorigen vollkommen identisch ist.

§. 49.

Bis hiezu betrachteten wir die Grenzen, innerhalb welcher das Integral genommen werden sollte, als bestimmt und gegeben. Jetzt wollen wir auch diese Bedingung aufheben, und uns die Frage vorlegen: Unter allen Relationen zwischen y und x (die übrigens in Beziehung auf die Grenzen mehrern Bedingungen unterworfen seyn können) und unter allen Werthen für die Grenzen, innerhalb welcher das Integral genommen werden kann, diejenige Relation und diejenigen Werthe für die Grenzen zu finden, vermöge welcher der Werth von

$$V = \int F\left\{x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}\right\} dx = \int W dx$$

ein Maximum oder Minimum, d. h. grösser oder kleiner werde, als der ihm, bei veränderter Relation und veränderten Grenzen, unmittelbar vorhergehende und folgende Werth.

Betrachten wir y als Repräsentanten der geforderten Funktion in x, und a und b als die gesuchten Grenzwerthe für x; so ist es klar, dass, mit Rücksicht auf die Variation von x, sowohl hier, als vorhin, seyn wird,

$$\delta V = o$$

so wohl für das Maximum, als das Minimum, und

$\delta^2 V < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum, unabhängig von δx und δy.

Nun ist, wenn wir die zuletzt gebrauchte abgekürzte Bezeichnung beibehalten, nach §. 24,

$$\delta V = \int \delta y \, \varphi(x) \, dx + \Omega_{(2)} + W_{(2)} \delta b - \Omega_{(1)} - W_{(1)} \delta a,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt; welche Grösse also

gleich Null ist. Auf eine, der vorigen vollkommen analoge Weise lässt sich zeigen, dass, welche auch die Bedingungen seyn mögen, denen die Funktionen mit Beziehung auf die Grenzen unterworfen sind, diese Gleichung stets zerfällt: erstlich, in die allgemeine Gleichung des Maximums oder des Minimums

$$\varphi(x) = o, \ (I)$$

und zweitens in die Gleichung für die Grenzen

$$\Omega_{(2)} + W_{(2)} \delta b - \Omega_{(1)} - W_{(1)} \delta a = o. \ (II.)$$

Hieraus geht also hervor, dass die allgemeine Gleichung, von welcher die Bestimmung eines Maximums oder Minimums abhängig ist, durch die Veränderlichkeit der Grenzen des Integrals auf keine Weise irgend eine Modification erhält. Dieselbe wird daher, allgemein zu reden, eine Differenzial-Gleichung von der $2m^{ten}$ Ordnung seyn, deren primitive Gleichung $2m$ beliebige Constanten enthalten wird. So fern nun keine anderweitige Bedingungen mit Beziehung auf die Grenzen vorhanden sind, wird die Gleichung (II) sich in $2m + 2$ besondere auflösen, nehmlich: in die des §. 44. $2m$ an der Zahl, und die beiden, aus der Variation von x entspringenden,

$$W_{(2)} = o, \ W_{(1)} = o,$$

die man also insgesammt erhält, indem man die Coefficienten der in ($II.$) enthaltenen Variationen einzeln gleich Null setzt, und vermittelst welcher man die $2m$ Constanten nebst den beiden gesuchten Grenzwerthen von x, a und b, wird bestimmen können, so fern wirklich ein Maximum oder Minimum statt findet. Sollte aber, mit Beziehung auf die Grenzen, eine Anzahl von r Bedingungsgleichungen vorhanden seyn, so würde man vermittelst dieser aus der Gleichung ($II.$), nach Vorschrift des vorigen §'s, eben so viele Variationen zu elimini-

ren, und die Coefficienten von den, in der resultirenden Gleichung zurückbleibenden Variationen einzeln gleich Null zu setzen haben. Die sich hieraus ergebenden $(2m+2-r)$ Gleichungen in Verbindung mit den r gegebenen, würden alsdann zur Bestimmung jener $2m+2$ Grössen dienen.

Die Funktion y und die Grenzwerthe von x auf diese Weise als bestimmt vorausgesetzt, hat man noch die Bedingung

$\delta^2 V < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum,

unabhängig von δx, δy, jedoch mit Rücksicht auf die gegebenen Bedingungsgleichnngen

$$W^{(1)} = o,\; W^{(2)} = o,\; W^{(3)} = o, \text{ u. s. w.};$$

mithin

$$\delta^2 V + \lambda^{(1)} \delta^2 W^{(1)} + \lambda^{(2)} \delta^2 W^{(2)} + \lambda^{(3)} \delta^2 W^{(3)} + \ldots$$

$< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum,

unabhängig von δx und δy.

Bezeichnet man nun allgemein die Variation der r^{ten} Ordnung von V, ohne Berücksichtigung der Variation von x, mit $\delta_1^r V$, und mit Rücksicht auf die Variation von x, mit $\delta^r V$; so ist nach §. 9,

$$\delta^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} \delta x^2 + 2 \frac{d\delta_1 V}{dx} \delta x + \delta_1^2 V,$$

mithin, da $V = \int W dx$, das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen.

$$\delta^2 V = \frac{dW}{dx} \delta x^2 + 2 \delta_1 W \delta x + \int \delta W d x$$

Substituirt man diesen Werth, so erlangt man

$$\int \delta_1^2 W dx + \frac{dW}{dx} \delta x^2 + 2\delta_1 W \delta x + \lambda^{(1)} \delta^2 W^{(1)} + \lambda^{(2)} \delta^2 W^{(2)} + \lambda^{(3)} \delta^2 W^{(3)} + \ldots,$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt, unabhängig von δx und δy,

$< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum.

Auf eine, der des §. 46 ganz ähnliche Weise ergiebt sich hieraus die Bedingung

$$\left(\frac{d^2 W}{dy^{(m)\,2}}\right) < o \text{ für das Maximum, und } > o \text{ für das Minimum,}$$

für alle Werthe von $x=a$ bis $x=b$, so fern $\delta_1^2 W$ ganz allgemein in zwei Theile zerlegt werden kann, von denen der eine unabhängig von δy integrabel ist, und der andere, innerhalb eben dieser Grenzen, nicht unendlich wird.

§. 50.

Um die Methode durch ein Beispiel zu erläutern, sei

$$V=\int dx \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{x}}.$$

Alsdann ist mit Rücksicht auf die Variation von x

$$\delta V=\frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{x}}\delta x+\int dx \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}\frac{d\delta y}{dx}$$

$$=\int \delta y d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}+\delta y\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}+\delta x\sqrt{\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{x}};$$

welcher Ausdruck, von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt, giebt

$$\delta V = \int \delta y \ \mathrm{d}. \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}}$$

$$+ \delta y_{(2)} \frac{\frac{\mathrm{d}y_{(2)}}{\mathrm{d}b}}{\sqrt{b\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2_{(2)}}{\mathrm{d}b^2}\right)}} - \delta y_{(1)} \frac{\frac{\mathrm{d}y_{(1)}}{\mathrm{d}a}}{\sqrt{a\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2_{(1)}}{\mathrm{d}a^2}\right)}}$$

$$+ \delta b \frac{\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2_{(2)}}{\mathrm{d}b^2}}}{\sqrt{b}} - \delta a \frac{\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2_{(1)}}{\mathrm{d}a^2}}}{\sqrt{a}},$$

das Integral von $x=a$ bis $x=b$ genommen.

Die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums ist demnach

$$\mathrm{d}. \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}} = 0;$$

mithin

$$\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}} = \alpha, \text{ und } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\sqrt{\frac{x}{\alpha^2} - x^2}},$$

wo α eine beliebige Constante bezeichnet. Um die letzte Gleichung zu integriren, wollen wir

$$\sqrt{\frac{x}{\alpha^2} - x^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \operatorname{Sin} \varphi$$

setzen; alsdann ist

$$x = \frac{1}{2\alpha^2}(1 - Cos\ \varphi),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{2\alpha^2}(1 - Cos\ \varphi),$$

folglich

$$y = \frac{1}{2\alpha^2}(\varphi - Sin\ \varphi) + \beta,$$

wo β eine zweite beliebige Constante bezeichnet, und die Elimination von φ vermittelst des Werthes in x die gesuchte Gleichung zwischen x und y giebt.

Substituirt man nun den für $\frac{dy}{dx}$ gefundenen Werth, so erhält man als Grenzgleichung

$$\alpha\delta y_{(2)} - \alpha\delta y_{(1)} + \frac{\delta b}{\sqrt{b - \alpha^2 b^2}} - \frac{\delta a}{\sqrt{a - \alpha^2 a^2}} = o.$$

I. Betrachten wir die Grenzen, innerhalb welcher das Integral genommen werden soll, mithin die Grössen a und b, als gegeben; so geht die vorige Gleichung, da alsdann $\delta a = o$, $\delta b = o$, über in

$$\alpha\delta y_{(2)} - \alpha\delta y_{(1)} = o.$$

1) Wird nun unter allen Relationen zwischen x und y diejenige verlangt, welche V, von $x = a$ bis $x = b$, zu einem Maximum oder Minimum mache; so hat man

$$\alpha = o, \text{ mithin } \varphi = o, \text{ und } y = \beta.$$

2) Wird unter allen Relationen, welche, für $x = a$ und $x = b$, der Gleichung

$$\Psi\{a, y_{(1)}, b, y_{(2)}\} = o = W^{(1)}$$

genügen, diejenige verlangt, welche V, innerhalb der bezeichneten

Grenzen, zu einem Maximum oder Minimum mache; so ergiebt sich daraus offenbar

$$\left(\frac{dW^{(1)}}{dy_{(1)}}\right)\delta y_{(1)} + \left(\frac{dW^{(1)}}{dy_{(2)}}\right)\delta y_{(2)} = o.$$

Addirt man diese Gleichung, nachdem man sie mit einem unbestimmten Factor $\lambda^{(1)}$ multiplicirt hat, zu der Gleichung für die Grenzen hinzu, und setzt in der Resultante die Coefficienten der Variationen einzeln gleich Null: so kommt

$$\alpha + \lambda^{(1)}\left(\frac{dW^{(1)}}{dy_{(1)}}\right) = o, \quad \alpha + \lambda^{(1)}\left(\frac{dW^{(1)}}{dy_{(2)}}\right) = o;$$

folglich, indem man $\lambda^{(1)}$ eliminirt,

$$\alpha\left(\frac{dW^{(1)}}{dy_{(2)}}\right) - \alpha\left(\frac{dW^{(1)}}{dy_{(1)}}\right) = o.$$

Man hat demnach

$$\alpha = o, \text{ und } y = \beta,$$

wo β durch die Gleichung $\Psi(a, \beta, b, \beta) = o$ bestimmt wird.

3) Wird unter allen Relationen, welche für $x = a$ und $x = b$ den beiden Gleichungen

$$W^{(1)} = \Psi(a, y_{(1)}, b, y_{(2)}) = o,$$
$$W^{(2)} = \Psi_{(1)}(a, y_{(1)}, b, y_{(2)}) = o,$$

entsprechen, diejenige verlangt, welche V, innerhalb der bezeichneten Grenzen, zu einem Maximum oder Minimum mache; so entstehen hieraus offenbar die variirten Gleichungen

$$\left(\frac{dW^{(1)}}{dy_{(1)}}\right)\delta y_{(1)} + \left(\frac{dW^{(1)}}{dy_{(2)}}\right)\delta y_{(2)} = o,$$
$$\left(\frac{dW^{(2)}}{dy_{(1)}}\right)\delta y_{(1)} + \left(\frac{dW^{(2)}}{dy_{(2)}}\right)\delta y_{(1)} = o,$$

welche, unter der natürlichen Voraussetzung, dass die eine jener Gleichungen nicht in der andern enthalten sei, oder, mit andern Worten, dass $y_{(1)}$ und $y_{(2)}$ durch die gegebenen Gleichungen wirklich bestimmt werden,

$$\delta y_{(1)} = o, \quad \delta y_{(2)} = o,$$

liefern. Um in diesem Falle α und β zu bestimmen, wird man aus den gefundenen allgemeinen Gleichungen

$$x = \frac{1}{2\alpha^2}(1 - Cos\ \varphi), \quad y = \frac{1}{2\alpha^2}(\varphi - Sin\ \varphi) + \beta,$$

die vier, den Grenzwerthen von x entsprechenden,

$$a = \frac{1}{2\alpha^2}(1 - Cos\ \varphi_{(1)}), \quad y_{(1)} = \frac{1}{2\alpha^2}(\varphi_{(1)} - Sin\ \varphi_{(1)}) + \beta,$$

$$b = \frac{1}{2\alpha^2}(1 - Cos\ \varphi_{(2)}), \quad y_{(2)} = \frac{1}{2\alpha^2}(\varphi_{(2)} - Sin\ \varphi_{(2)}) + \beta,$$

ziehen, und, diese mit den gegebenen Bedingungsgleichungen

$$\Psi\ (a, y_{(1)}, b, y_{(2)}) = o, \quad \Psi_{(1)}\ (a, y_{(1)}, b, y_{(2)}) = o,$$

verbindend, sechs Gleichungen zwischen den sechs Unbekannten α, β, $y_{(1)}$, $y_{(2)}$, $\varphi_{(1)}$, $\varphi_{(2)}$ erhalten, welche zur Bestimmung derselben dienen.

II. Betrachtet man die Grenzwerthe für x, a und b, als fraglich, so ist die Gleichung für die Grenzen

$$\alpha\delta y_{(2)} - \alpha\delta y_{(1)} + \frac{\delta b}{\sqrt{(b - \alpha^2 b^2)}} - \frac{\delta a}{\sqrt{(a - \alpha^2 a^2)}} = o.$$

1) Sind nun keine weiteren Bedingungen gegeben, sondern wird unter *allen* Relationen und unter *allen* Grenzen nach denjenigen ge-

fragt, vermöge welcher $V = \int W \mathrm{d}x$ ein Maximum oder ein Minimum werde; so hat man

$$a = o,$$

aus welcher, in Verbindung mit

$$\frac{1}{\sqrt{b - a^2 b^2}} = o, \quad \frac{1}{\sqrt{a - a^2 a^2}} = o,$$

hervorgeht

$$b = \infty, \; a = \overline{\infty},$$

welches zeigt, dass es in diesem Sinne weder ein Maximum noch ein Minimum giebt.

2) Ist eine der Grössen a und b gegeben, so wird die andere dennoch $= \infty$, welches andeutet, dass auch in diesem Falle weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden ist.

3) Finden anderweitige Bedingungen für die Grenzen statt, so hat man damit nach der obigen Methode, jedoch unter Berücksichtigung der Variation von x, zu verfahren.

Endlich, da $\left(\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}y'^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^3}}$ ist; so wird V, so fern man die positive Wurzel des vorgegebenen Integral-Ausdrucks nimmt, ein Minimum seyn.

§. 51.

Es ist die geometrische Beziehung einer solchen Aufgabe, welche auf die Bedeutung der Bedingungsgleichungen für die Grenzen ein besonderes Licht wirft. Die in Rede stehende kann folgendermassen abgefasst werden: Unter allen Curven (durch anderweitige Bedingungen näher characterisirt, oder nicht) diejenige zu finden, in welcher

$$V = \int dx \, \frac{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{x}}$$

ein Maximum oder Minimum sei.

Den vorigen Betrachtungen nach ist diese Curve, im Allgemeinen, gegeben durch die Gleichungen

$$x = \frac{1}{2\alpha^2}(1 - Cos.\ \varphi)$$

$$y = \frac{1}{2\alpha^2}(\varphi - Sin.\ \varphi) + \beta,$$

welche bekanntlich eine Cycloide bezeichnen, deren Erzeugungskreis α^2 zum Durchmesser hat, und sich auf einer, mit der Axe der y pararellelen, von dieser und β entfernten, geraden Linie bewegt.

I. Betrachten wir die Grenzen a und b, innerhalb welcher das Integral genommen werden soll, als gegeben, und

1) sind alsdann keine fernern Bedingungen vorhanden; so ist die Frage folgende: Unter *allen* Curven diejenige zu finden, in welcher

$V = \int dx \, \frac{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{x}}$, zwischen den Abcissen a und b, ein Maximum oder Minimum sei.

Wie wir gesehen haben, ist in diesem Falle $y = \beta$, mithin die gesuchte Curve eine gerade, mit der Axe der x parallele, Linie.

2) Betrachten wir überdiess $y_{(1)}$ als gegeben, so sind die Coordinaten des Anfangspunktes $a, y_{(1)}$, bekannt, und die Frage kann alsdann auf folgende Weise ausgesprochen werden: Durch einen gegebenen Punkt eine Curve zu legen, in welcher $V = \int dx \, \frac{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{x}}$,

zwischen diesem Punkte und einem Andern, dessen Abcisse $= b$ ist, enthalten, ein Maximum oder ein Minimum sei.

Der vorigen Rechnung gemäss ist diese Curve eine gerade, mit der Axe der x parallele, Linie.

3) Nehmen wir ausserdem noch $y_{(2)}$ als gegeben an, so ist die Frage folgende: Durch zwei gegebenen Punkte, deren Coordinaten $a, y_{(1)}$; $b, y_{(2)}$ sind, eine Curve zu legen, in welcher $V = \int dx \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{x}}$, zwischen diesen Punkten enthalten, ein Maximum oder ein Minimum sei.

Die gesuchte Curve ist alsdann, allgemein zu reden, die oben näher bezeichnete Cycloide.

II. Setzt man die Grenzwerthe für x, a und b nehmlich, als fraglich voraus, und

1) sind alsdann keine andern Bedingungen vorhanden; so ist die Frage folgende: Unter *allen* Punkten in einer Ebene *zwei*, und unter *allen* Curven diejenige zu finden, so dass, wenn man die erstern vermittelst letzterer mit einander verbindet, der Ausdruck $\int dx \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{x}}$, zwischen diesen Punkten genommen, ein Maximum oder ein Minimum sei.

Dem obigen Calcül nach, was man auch sehr leicht fühlt, sind diese nicht vorhanden.

2) Die Sache verändert indess von Gestalt, wenn wir Bedingungsgleichungen für die Grenzen annehmen, vermittelst welcher die Aufgabe zugleich ein sehr interessantes Ansehen gewinnt. Sie lässt

sich alsdann folgendermassen aussprechen: Es sind in einer Ebene zwei Curven gegeben; man wünscht dieselben durch eine dritte dergestalt zu verbinden, dass die Formel $\int dx \frac{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}}{\sqrt{x}}$, von dem einen bis zum andern Durchschnittspunkte genommen, ein Maximum oder ein Minimum sei. Die Frage ist nach dieser Curve und nach den Coordinaten der besagten Durchschnittspunkte.

Die erwähnten Curven seien durch die Gleichungen

$$\Psi_{(1)} (x, \overset{1}{y}) = o, \quad \Psi_{(2)} (x, \overset{2}{y}) = o,$$

von denen die erste sich auf den Anfangs- und die zweite sich auf den Endpunkt bezieht, gegeben, und die gesuchte, die Cycloide in diesem Falle, werde durch

$$y = f (x)$$

repräsentirt.

Das System x, y muss also die Beschaffenheit haben, dass es für $x = a$ den Gleichungen

$$\Psi_{(1)} (x, \overset{1}{y}) = o, \; y = f (x),$$

und für $x = b$ den Gleichungen

$$\Psi_{(2)} (x, \overset{2}{y}) = o, \quad y = f (x)$$

genüge. Bezeichnet man daher die correspondirenden Werthe von y mit $y_{(1)}, y_{(2)}$; so hat man die Gleichungen

$$y_{(1)} = f (a), \; \Psi_{(1)} (a, y_{(1)}) = o,$$

$$y_{(2)} = f (b), \; \Psi_{(2)} (b, y_{(2)}) = o.$$

Das System $x + k\delta x, y + k\delta y$ muss so beschaffen seyn, dass es, unabhängig von k, für $x = a$ der Gleichung

$$\Psi_{(1)}(x, \overset{1}{y}) = o,$$

und für $x = b$ der Gleichung

$$\Psi_{(2)}(x, \overset{2}{y}) = o$$

entspreche. Da nun, wenn y für $x = a$ und $x = b$ mit $y_{(1)}$ und $y_{(2)}$ bezeichnet wird, für $x = a + k\delta a$

$$y = y_{(1)} + \frac{dy_{(1)}}{da} k\delta a + \frac{d^2 y_{(1)}}{da^2} \frac{k^2 \delta a^2}{1.2} + \ldots = y_{(1)}^{(1)},$$

und für $x = b + k\delta b$

$$y = y_{(2)} + \frac{dy_{(2)}}{db} k\delta b + \frac{d^2 y_{(2)}}{db^2} \frac{k^2 \delta b^2}{1.2} + \ldots = y_{(2)}^{(1)}$$

ist; so hat man

$$\Psi_{(1)}(a + k\delta a, y_{(1)}^{(1)} + k\delta y_{(1)}^{(1)}) = o, \quad \Psi_{(2)}(b + k\delta b, y_{(2)}^{(1)} + k\delta y_{(2)}^{(1)}) = o,$$

unabhängig von k; folglich

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\left(\frac{d\Psi_{(1)}}{da}\right) + \left(\frac{d\Psi_{(1)}}{dy_{(1)}}\right)\frac{dy_{(1)}}{da}\right\}\delta a + \left(\frac{d\Psi_{(1)}}{dy_{(1)}}\right)\delta y_{(1)} = o, \\ \left\{\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right) + \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{dy_{(2)}}\right)\frac{dy_{(2)}}{db}\right\}\delta b + \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{dy_{(2)}}\right)\delta y_{(2)} = o. \end{array}\right\} (I.)$$

Von einer andern Seite hat man, da

$$\Psi_{(1)}(x, \overset{1}{y}) = o, \quad \Psi_{(2)}(x, \overset{2}{y}) = o,$$

ist,

$$\left(\frac{d\Psi_{(1)}}{dx}\right) + \left(\frac{d\Psi_{(1)}}{d\overset{1}{y}}\right)\frac{d\overset{1}{y}}{dx} = o, \quad \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{dx}\right) + \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{y}}\right)\frac{d\overset{2}{y}}{dx} = o,$$

unabhängig von jedem besondern Werthe von x; mithin

$$\left(\frac{d\Psi_{(1)}}{da}\right) + \left(\frac{d\Psi_{(1)}}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right)\frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da} = o, \quad \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right) + \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{y}_{(2)}}\right)\frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db} = o.$$

Eliminirt man vermittelst dieser Gleichungen die Grössen $\left(\frac{d\Psi_{(1)}}{da}\right)$, $\left(\frac{d\Psi_{(1)}}{db}\right)$ aus $(I.)$, und überlegt, dass

$$\left(\frac{d\Psi_{(1)}}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right) = \left(\frac{d\Psi_{(1)}}{dy_{(1)}}\right),\ \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{y}_{(2)}}\right) = \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{dy_{(2)}}\right)$$

ist; so erhält man

$$\left(\frac{dy_{(1)}}{da} - \frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da}\right) \delta a + \delta y_{(1)} = o,$$

$$\left(\frac{dy_{(2)}}{db} - \frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db}\right) \delta b + \delta y_{(2)} = o,$$

wo sich $\overset{1}{y}_{(1)}$, $\overset{2}{y}_{(2)}$ auf die Grenz-Curven, und $y_{(1)}$, $y_{(2)}$ auf die Curve des Maximums oder Minimums beziehen.

Eliminirt man ferner vermittelst dieser Gleichungen $\delta y_{(1)}$, $\delta y_{(2)}$ aus der Grenzgleichung

$$\delta y_{(2)} \frac{\frac{dy_{(2)}}{db}}{\sqrt{b\left(1+\frac{dy^2_{(2)}}{db^2}\right)}} - \delta y_{(1)} \frac{\frac{dy_{(1)}}{da}}{\sqrt{a\left(1+\frac{dy^2_{(1)}}{da^2}\right)}}$$

$$+ \delta b \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2_{(2)}}{db^2}}}{\sqrt{b}} - \delta a \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2_{(1)}}{da^2}}}{\sqrt{a}};$$

so erlangt man

$$\frac{1 + \frac{dy_{(2)}}{db}\cdot\frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db}}{\sqrt{b\left(1+\frac{dy^2_{(2)}}{db^2}\right)}} \delta b - \frac{1 + \frac{dy_{(1)}}{da}\cdot\frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da}}{\sqrt{a\left(1+\frac{dy^2_{(1)}}{da^2}\right)}} \delta a = o,$$

welche die beiden

$$1 + \frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db} \cdot \frac{dy_{(2)}}{db} = o, \quad 1 + \frac{dy_{(1)}}{da} \cdot \frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da} = o,$$

verschafft. Man sieht also, dass in jedem Durchschnittspunkte die beiden Tangenten, von denen die eine der gesuchten und die andere der Grenz-Curve angehört, rechte Winkel mit einander machen müssen.

Verbindet man mit diesen Gleichungen erstlich die unmittelbar gegebenen

$$\Psi_{(1)}\,(a, \overset{1}{y}_{(1)}) = o, \quad \Psi_{(2)}\,(b, \overset{2}{y}_{(2)}) = o,$$

wo $\overset{1}{y}_{(1)} = y_{(1)}$, und $\overset{2}{y}_{(2)} = y_{(2)}$ ist, und zweitens die gefundene

$$y_{(1)} = f\,(a), \quad y_{(2)} = f\,(b);$$

so hat man sechs Gleichungen zur Bestimmung der sechs Unbekannten α, β, a, b, $y_{(1)}$, $y_{(2)}$. Da die Aufgabe hiedurch auf eine völlig bekannte zurück geführt ist, so würde es überflüssig seyn, hiebei länger zu verweilen.

§. 52.

Die bisherigen Betrachtungen betrafen lediglich die einfachste Form, unter welcher sich ein Integral-Ausdruck darbiethen kann. Die zusammengesetztern Formen erschweren allerdings die Rechnung, machen indess in Ansehung der Methode keinen wesentlichen Unterschied, wie aus einer nähern Betrachtung der Form von §. 25, zu der wir jetzt fortschreiten wollen, erhellen wird.

Es sei $V = \int W dx$, das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen, die Grösse, in deren Beziehung das Maximum oder Minimum gefordert wird; und

$$W = F\left\{\Delta, \Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \Delta^{(3)} \ldots x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ky}{dx^k}\right\},$$

wo

$$\Delta = \int \Pi dx, \text{ und } \Pi = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}\right),$$

$$\Delta^{(1)} = \int \Pi^{(1)} dx, \text{ und } \Pi^{(1)} = f^{(1)}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right),$$

$$\Delta^{(2)} = \int \Pi^{(2)} dx, \text{ und } \Pi^{(2)} = f^{(2)}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^py}{dx^p}\right),$$

u. s. w.

ist; indem die sämmtlichen Integrale so genommen gedacht werden, dass sie für $x = a$ verschwinden.

Da, nach §. 25, und unter der dortigen Bezeichnung,

$$\delta V = \int \delta y \left\{ Y + \overset{r}{{}^{1 \ldots (\xi)}\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} \right\} dx + \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)},$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, ist; so hat man für die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$Y + \overset{r}{{}^{1 \ldots (\xi)}\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} = o, \; (I.)$$

und als Gleichung für die Grenzen

$$\Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o. \; (II.)$$

Entwickelt man in *(I.)* den Ausdruck auf der linken Seite des Gleichheitzeichens, und setzt anstatt $\overset{r}{Y}$ dessen Werth

$$\xi \overset{r}{\Upsilon} + \xi^{(1)} \overset{r}{\Upsilon}{}^{(1)} + \xi^{(2)} \overset{r}{\Upsilon}{}^{(2)} + \xi^{(3)} \overset{r}{\Upsilon}{}^{(3)} + \ldots \overset{r}{Y};$$

so wird die entstehende Differenzialgleichung, im Allgemeinen von der $2(\varrho)^{\text{ten}}$ Ordnung, die Grössen ξ, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, ... Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$ ... enthalten, welche, wegen ihrer Form

$$I - \int \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Delta}\right) \mathrm{d}x, \quad I' - \int \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Delta^{(1)}}\right) \mathrm{d}x, \ldots \int \Pi \, \mathrm{d}x, \int \Pi^{(1)} \mathrm{d}x \ldots,$$

eliminirt werden müssen, bevor zur Integration geschritten werden kann. Man überzeugt sich leicht, dass die Differenzialgleichung unter folgende Form wird gebracht werden können:

$$P + \xi Q + \xi^{(1)} Q^{(1)} + \xi^{(2)} Q^{(2)} + \xi^{(3)} Q^{(3)} + \ldots \xi^{(\mu-1)} Q^{(\mu-1)} = o, \; (I),$$

wo P, Q, $Q^{(1)}$, $Q^{(2)}$, ... Grössen bezeichnen, die von ξ, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, ... unabhängig sind. Differenziirt man diese Gleichung μ mal hinter einander, so wird man durch die Verbindung von $(I.)$ mit diesem μ neuen Gleichungen, von denen die höchste von der Ordnung $(2(\varrho) + \mu)$ seyn wird, die μ Grössen ξ, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, ... $\xi^{(\mu-1)}$ eliminiren, und als Resultante eine Differenzialgleichung von der Ordnung $(2(\varrho) + \mu)$,

$$P_{(\mu)} = o$$

nehmlich, erhalten können, aus welcher noch die μ Grössen Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, ... $\Delta^{(\mu-1)}$ eliminirt werden müssen. Differenziirt man daher die zuletzt gewonnene Differenzialgleichung noch μ mal hinter einander, so wird man aus dieser vermittelst der μ entstehenden auch jene Grössen eliminiren können, und zu einer Endgleichung gelangen, welche, allgemein zu reden, von der $2(\varrho)+\mu)^{\text{ten}}$ Ordnung seyn wird.

Die Sache kommt demnach darauf zurück, die Gleichung $(I.)$ 2μ mal hinter einander zu differenziiren, und alsdann zwischen diesen 2μ neuen Gleichungen und der Gleichung $(I.)$ die 2μ Grössen

ξ, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, ... $\xi^{(\mu-1)}$; Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, ... $\Delta^{(\mu-1)}$ zu elimiren. Da die hervortretende Endgleichung von der $2((\varrho)+\mu)^{\text{ten}}$ Ordnung seyn wird; so wird die gesuchte primitive Gleichung $2((\varrho)+\mu)^{\text{ten}}$ Constanten enthalten, die aber nicht alle beliebig sind. Denn da die Grössen ξ, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, ... Δ, $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$, ... als bekannt angesehen werden können, so bald die Relation zwischen y und x gegeben ist; so wird man vermittelst der vorhandenen Differenzialgleichungen, von der Ordnung $2(\varrho)$ bis $2((\varrho)+\mu) - 1$ eingeschlossen, 2μ derselben bestimmen können, so dass nur eine Anzahl von $2(\varrho)$ beliebig bleibt.

Da nun die Gleichung für die Grenzen

$$\Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o$$

in Verbindung mit den Bedingungsgleichungen, die in dieser Beziehung vorhanden seyn können, dem Vorhergehenden gemäss, unabhängig von der Variation von x, stets eine Anzahl von $2(\varrho)$ Gleichungen verschafft; so leuchtet es ein, dass, von diesem Punkte an, der vorliegende Fall dem vorigen vollkommen gleich steht, und daher die desfalls gemachten Bemerkungen auch hier ihre Anwendung finden.

§. 53.

Folgendes Beispiel mag zur Erläuterung der Sache dienen.

Es sei $W = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \int y dx$, das Integral so genommen gedacht, dass es für $x = a$ verschwinde, und $V = \int W dx$, das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen.

Um zu den erforderlichen Gleichnngen zu gelangen, würde man allerdings die allgemeine Formel des §. 25 auf diesen besondern Fall

unmittelbar anwenden können. Inzwischen wird es nicht undienlich seyn, die Entwickelung selbst aufzunehmen, um die daselbst angewandte Methode zugleich, wo möglich, noch mehr zu verdeutlichen. Nach der dortigen Bezeichnung ist

$$\Delta = \int y\,dx, \text{ folglich } \delta\Delta = \int \delta y\,dx;$$

ferner

$$W = \frac{\Delta}{\frac{dy}{dx}}, \text{ also } \delta W = \frac{\delta\Delta}{\frac{dy}{dx}} - \frac{\Delta}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{d\delta y}{dx}$$

oder, indem man Δ, $\delta\Delta$ eliminirt,

$$\delta W = \frac{\int \delta y\,dx}{\frac{dy}{dx}} - \frac{\int y\,dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{d\delta y}{dx},$$

die Integrale so genommen, dass sie für $x = a$ verschwinden.

Man hat demnach

$$\delta V = \int \frac{\int \delta y\,dx}{\frac{dy}{dx}}\,dx - \int \frac{\int y\,dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,\frac{d\delta y}{dx}\,dx,$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Nun ist, der bekannten Transformation gemäss,

$$\int \frac{\int \delta y\,dx}{\frac{dy}{dx}}\,dx = \int \frac{dx}{\frac{dy}{dx}} \times \int \delta y\,dx - \int \left\{ \int \frac{dx}{\frac{dy}{dx}} \times \delta y\,dx \right\}$$

$$= \int \left\{ I - \int \frac{dx}{\frac{dy}{dx}} \right\} \delta y\,dx,$$

indem man $\int \frac{dx}{\frac{dy}{dx}}$, von $x = a$ bis $x = b$, mit I bezeichnet;

ferner $\int \frac{\int y\,dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \frac{d\delta y}{dx} dx = \frac{\int y\,dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \delta y - \int \frac{1}{dx} d. \frac{\int y\,dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \delta y\, dx,$

von $x = a$ bis $x = b$. Man hat demnach

$$\delta V = \int dx \left\{ I - \int \frac{dx}{\frac{dy}{dx}} + \frac{1}{dx} d. \frac{\int y\,dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right\} \delta y - \frac{\int y\,dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \delta y$$

von $x = a$ bis $x = b$ genommen.

Die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums ist daher

$$I - \int \frac{dx}{\frac{dy}{dx}} + \frac{1}{dx} d. \frac{\int y\,dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = o,$$

oder

$$I - \int \frac{dx}{\frac{dy}{dx}} + \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \frac{2 \frac{d^2y}{dx^2} \int y\,dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = o$$

aus welcher $I - \int \frac{dx}{\frac{dy}{dx}}$ und $\int y\,dx$ eliminirt werden müssen, bevor zur Integration geschritten werden kann.

Differenziirt man daher diese Gleichung, so kommt

$$3 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \int y\,dx - 2y \frac{dy}{dx} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \frac{d^3y}{dx^3} \int y\,dx = o, \quad (II.)$$

welche Gleichung, wegen der besondern Form von $(I.)$, bereits von

$I - \int \frac{dx}{\frac{dy}{dx}}$ unabhängig ist. Bringt man (*II.*) unter die Form

$$\int y\,dx = \frac{2y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}},$$

und differenziirt diese, so wird schon die unmittelbar hervortretende von $\int y dx$ befreit seyn und der Integration unterworfen werden können. Da sie von der vierten Ordnung seyn wird, so wird die gesuchte primitive Gleichung vier Constanten enthalten, von denen zwei durch die Gleichungen (*I.*) und (*II.*) bestimmt werden.

Bezeichnet man nun, der Kürze halber,

$$\frac{\int y dx}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \text{ für } x = a, \text{ mit } G_{(1)},$$

$$\text{———}, \text{ für } x = b, \text{ mit } G_{(2)},$$

so ist die Gleichung für die Grenzen

$$G_{(2)}\,\delta y_{(2)} - G_{(1)}\,\delta y_{(1)} = o,$$

welche, nach Massgabe der statt findenden Bedingungen, die, zur Bestimmung der beiden übrigen Constanten, erforderlichen Gleichungen abgeben wird.

Die Behandlung der Form des §. 26. unterscheidet sich von der der einfachern Ausdrücke ebenfalls nur hinsichtlich der unmittelbar hervortretenden allgemeinen Gleichungen. Da die Operation, welcher sie, wegen der darin enthaltenen unbestimmten Integral-Ausdrücke, unterworfen werden muss, bevor zur Integration geschritten werden kann, der des zuletzt betrachteten Falles vollkommen ana-

log ist; so würde eine besondere Betrachtung dieser Form überflüssig seyn.

§. 54.

Ist die Grösse V, welche, von $x = a$ bis $x = b$, ein Maximum oder ein Minimum seyn soll, durch eine Differenzialgleichung von der Form

$$F\left\{V, \frac{dV}{dx}, \frac{d^2V}{dx^2}, \ldots \frac{d^\mu V}{dx^\mu}, x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}\right\} = o \; (I.)$$

gegeben, so hat man, so fern y die gefragte Funktion von x repräsentirt, ebenfalls

$$\delta V = o$$

sowohl für das Maximum, als das Minimum, und

$\delta^2 V < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum.

Nun ist, nach §. 27,

$$\delta V \; {}^{1 \ldots \mu}\overset{r}{\Sigma} \mp \frac{d^{r \cdot 1} \; \Delta_{(2)} \overset{r}{\Psi}_{(2)}}{db^{r \cdot 1}} = - \int \chi \, dx,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, wo $\acute{\Delta}$ bestimmt wird durch die Gleichung

$$\Delta \Psi + {}^{1 \ldots \mu}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \; \Delta \overset{r}{\Psi}}{dx^r} = o, \; (II)$$

und

$$\chi = \Delta Y \delta y + {}^{1 \ldots m}\overset{r}{\Sigma} \Delta \overset{r}{Y} \frac{d^r \delta y}{dx^r}$$

ist; wie auch die μ Constanten den daselbst nahmhaft gemachten Bedingungen gemäss bestimmt werden müssen.

Transformirt man daher den Ausdruck $\int \chi dx$ nach der vorbeschriebenen Methode, so erhält man als allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$\Delta Y + {}^{1\ldots m}\Sigma \pm \frac{d^r \Delta \overset{r}{Y}}{dx^r} = o, \ (III)$$

und als Grenzgleichung

$$\delta y_{(2)} \, {}^{1\ldots m}\Sigma \mp \frac{d^{r-1}\Delta_{(2)}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-1}} + \frac{d\delta y_{(2)}}{db} \, {}^{2\ldots m}\Sigma \mp \frac{d^{r-2}\Delta_{(2)}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}} \ldots\ldots \mp \frac{d^{m-1}\delta y_{(2)}}{db^{m-1}} \Delta_{(2)}\overset{m}{Y}_{(2)}$$

$$-\delta y_{(1)} \, {}^{1\ldots m}\Sigma \mp \frac{d^{r-1}\Delta_{(1)}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-1}} - \frac{d\delta y_{(1)}}{da} \, {}^{2\ldots m}\Sigma \mp \frac{d^{r-2}\Delta_{(1)}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-2}} \ldots\ldots \pm \frac{d^{m-1}\delta y_{(1)}}{da^{m-1}} \Delta_{(1)}\overset{m}{Y}_{(1)}$$

$$= o, \ (IV.)$$

Die Gleichungen (I), (II) und (III) dienen zur Bestimmung von V, Δ und γ und die Gleichung (IV) in Verbindung mit den oben erwähnten μ Bedingungen zur Bestimmung der $2m + \mu$ Constanten.

§. 55.

Um die Methode durch ein Beispiel zu erläutern, sei V gegeben durch die Gleichung

$$\frac{dV}{dx} + \alpha V^n \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)} - \gamma = o, \ (1)$$

welche uns die variirte Gleichung

$$\frac{d\delta V}{dx} + n\alpha V^{n-1}\delta V \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{\alpha V^n \frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = o$$

verschafft. Multiplicirt man diese Gleichung mit Δ und transformirt solche, so kommt

$$\int \delta V \left\{ n\alpha V^{n-1} \Delta \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \frac{d\Delta}{dx} \right\} dx + \int \frac{\alpha \Delta V^n \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} dx + \Delta \delta V = C.$$

Setzt man nun

$$n\alpha V^{n-1} \Delta \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \frac{d\Delta}{dx} = o, \quad (2)$$

so hat man

$$\frac{d\Delta}{\Delta} = n\alpha V^{n-1} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

mithin

$$\Delta = e^{\int n\alpha V^{n-1} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx}.$$

Dieses vorausgesetzt, geht die obige Gleichung über in

$$\Delta \delta V + \int \frac{\alpha \Delta V^n \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} dx = C,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen. Zur Bestimmung der Constante C dient die Bemerkung, dass, da V für $x = a$, als gegeben, δV für eben diesen Werth von x gleich Null angesehen werden kann.

Bezeichnet man daher $\int \frac{\alpha \Delta V^n \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} dx$ für $x = a$ mit $\Gamma_{(1)}$,

und für $x = b$ mit $\Gamma_{(2)}$; so hat man

$$C = \Gamma_{(1)},$$

folglich

$$\Delta_{(2)} \delta V + \Gamma_{(2)} - \Gamma_{(1)} = o,$$

oder

$$\Delta_{(2)} \delta V = -\int \frac{\alpha \Delta V^n \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} dx,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt. Transformirt man den auf der rechten Seite des Gleichheitzeichens befindlichen Ausdruck nach der bekannten Methode, so kommt

$$\Delta_{(2)} \delta V = \int d. \frac{\alpha \Delta V^n \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \cdot \delta y$$

$$- \delta y_{(2)} \frac{\Delta_{(2)} \alpha V_{(2)}^n \frac{dy_{(2)}}{db}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_{(2)}}{db}\right)^2}} + \delta y_{(1)} \frac{\Delta_{(1)} \alpha V_{(1)}^n \frac{dy_{(1)}}{da}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_{(1)}}{da}\right)^2}},$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen.

Hieraus ergiebt sich als allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$d. \frac{\alpha \Delta V^n \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = o, \quad (3)$$

und als Gleichung für die Grenzen

$$\delta y_{(2)} \frac{\Delta_{(2)} \alpha V^{n}_{(2)} \frac{dy_{(2)}}{db}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_{(2)}}{db}\right)^2}} - \delta y_{(1)} \frac{\Delta_{(1)} \alpha V^{n}_{(1)} \frac{dy_{(1)}}{da}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_{(1)}}{da}\right)^2}} = o, \quad (4).$$

Die Gleichung (3) liefert sogleich

$$\frac{\alpha \Delta V^{n} \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = D,$$

oder, indem man Δ vermittelst der obigen, aus (2) entspringenden Gleichung eliminirt,

$$\frac{\alpha V^{n} \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} e^{\int n\alpha V^{n-1} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx} = D,$$

wo D eine beliebige Constante bezeichnet.

Um nun ferner aus dieser Gleichung V zu eliminiren, wollen wir sie unter die Form

$$\int n\alpha V^{n} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx - Log \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + Log \alpha V^{n} \frac{dy}{dx} = Log\ D$$

stellen und differenziiren, wodurch entsteht

$$n\alpha V^{n} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx + \frac{V \frac{d^2y}{dx}}{\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} + n\, dV = o.$$

Verbindet man diese Gleichung mit (1), so erhält man

$$V = - \frac{n\gamma \frac{dy}{dx}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Substituirt man nun diesen Werth von V in (1), so erhält man eine Differenzial-Gleichung zwischen x und y. Damit die Resultante unter einer bequemern Gestalt hervortrete, wollen wir

$$\frac{n\gamma}{\frac{d^2y}{dx}} = -\frac{t}{dx}, \text{ folglich } dx = -\frac{t\frac{d^2y}{dx}}{n\gamma}$$

setzen. Alsdann geht V über in

$$V = \frac{dy}{dx}\,t\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\},$$

mithin

$$dV = dt\,\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} + t\,d.\frac{dy}{dx}\left\{1+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}$$

und die Gleichung (1), nach der Substitution dieser Werthe, in

$$\frac{dy}{dx}dt\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}+t\,d.\frac{dy}{dx}\left\{1+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}-\alpha\left(\frac{dy}{dx}\right)^n t^{n+1}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{n+\frac{1}{2}}d.\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{t\,d\frac{dy}{dx}}{n} = 0,$$

oder in

$$\frac{\alpha\,d.\frac{dy}{dx}}{\gamma\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{n\frac{dy}{dx}\,dt\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}+t\,d.\frac{dy}{dx}\left\{n+1+3n\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{t^{n+1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+2}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{n+\frac{1}{2}}},$$

von der das Integral

$$\frac{\alpha}{\gamma\frac{dy}{dx}}+\frac{\beta}{\gamma} = \frac{1}{t^n\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n+1}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{n-\frac{1}{2}}}$$

ist, wo $\frac{\beta}{\gamma}$ eine beliebige Constante bezeichnet. Löst man diese

Gleichung in Beziehung auf t auf, so kommt

$$t = \frac{\sqrt[n]{\gamma}}{\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1-\frac{1}{2n}} \sqrt{\alpha+\beta\frac{dy}{dx}}};$$

folglich, diese mit

$$dx = -\frac{t\,\frac{d^2y}{dx}}{n\gamma}$$

verbindend,

$$dx = -\frac{\frac{d^2y}{dx}}{n\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1-\frac{1}{2n}} \sqrt[n]{\gamma^{n-1}\left(\alpha+\beta\frac{dy}{dx}\right)}},$$

und

$$dy = -\frac{\frac{d^2y}{dx}}{n\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1-\frac{1}{2n}} \sqrt[n]{\gamma^{n-1}\left(\alpha+\beta\frac{dy}{dx}\right)}}.$$

Integrirt man die beiden letzten Gleichungen, so erlangt man

$$x = -\frac{1}{n\gamma}\int\frac{\frac{d^2y}{dx}}{\frac{dy}{dx}\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}\sqrt[n]{\frac{\gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\alpha+\beta\frac{dy}{dx}}},$$

$$y = -\frac{1}{n\gamma}\int\frac{\frac{d^2y}{dx}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\sqrt[n]{\frac{\gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\alpha+\beta\frac{dy}{dx}}};$$

und endlich, indem man aus

$$V = \frac{dy}{dx} t. \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\}$$

t eliminirt,

$$V = \sqrt[n]{\frac{\gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\alpha + \beta \frac{dy}{dx}}}.$$

§. 56.

Nach diesen einfachern Betrachtungen wollen wir jetzt die Aufga- in grösserer Allgemeinheit vornehmen.

Es sei

$$V = \int W dx$$

und

$$W = F\left\{x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^my}{dx^m}; z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \cdots \frac{d^nz}{dx^n}; t, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}, \cdots \frac{d^pt}{dx^p}; u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \cdots \frac{d^qu}{dx^q}, \cdots \right\},$$

wo x als absolut-, und $y, z, t, u \ldots$ sämmtlich independent von einander, als relativ-unabhängig betrachtet werden. Verlangt werden solche Relationen für $y, z, t, u \ldots$ und solche Grenzwerthe, a und b, für x, dass V, mit Berücksichtigung der vorhandenen Bedingungsgleichungen hinsichtlich der Grenzen, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Es mögen $y, z, t, u \ldots$ die gesuchten Funktionen von x, a und b die gefragten Grenzwerthe für x, und V selbst den correspondirenden Werth von V bezeichnen; $V_{(1)}$ repräsentire den Werth von V, welcher entsteht, wenn man $x + k\delta x$, $y + k\delta y$, $z + k\delta z$, $t + k\delta t$, $u + k\delta u \ldots$ an die Stelle von $x, y, z, t, u \ldots$ substituirt, wo man sich, der grössern Allgemeinheit wegen, unter $\delta y, \delta z, \delta t \ldots$ die

Formen $\alpha f(x)$, $\beta f_{,}(x)$, $\gamma f_{,,}(x)$ . . . vorstellen kann. Alsdann hat man

$V_{(1)} < V$ für das Maximum, und $> V$ für das Minimum;

folglich, da

$$V_{(1)} = V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \frac{k^4}{1.2.3.4}\delta^4 V + \ldots$$

ist,

$$k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \frac{k^4}{1.2.3.4}\delta^4 V + \ldots$$

$< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum,

wie klein auch k, positiv oder negativ, und welche Formen auch für δx, δy, δz, δt, δu . . . genommen werden.

Da aber der Betrag dieser Reihe für $k = o$ verschwindet, so kann diese Grösse so klein gedacht werden, dass das Zeichen desselben bloss von dem des ersten Gliedes abhängig werde; und da dieses mit k von Zeichen verändert, so kann offenbar der obigen Forderung nicht genügt werden, wofern nicht, sowohl für das Maximum, als das Minimum, unabhängig von δx, δy, δz, δt, δu . . .

$$\delta V = o$$

ist. Dieses vorausgesetzt, reducirt sich die obige Bedingung auf

$$\frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \frac{k^4}{1.2.3.4}\delta^4 V + \ldots$$

$< o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum,

unabhängig von k, δx, δy, δz, δt, δu . . . . Da diese Grösse ebenfalls für $k = o$ verschwindet; so hat man hier, wie zuvor,

$\delta^2 V < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum,

unabhängig von δx, δy, δz, δt, δu u. s. w.

§. 57.

Setzt man nun in der Gleichung

$$\delta V = o$$

für δV den §. 23 entwickelten Werth; so erhält man auf der linken Seite des Gleichheitzeichens eine Form, in welcher die Glieder theils mit dem Integrationszeichen behaftet, theils von demselben befreit sind. Der Kürze wegen wollen wir diese Gleichung durch

$$\int \varphi^{(y)}(x)\,\delta y\,dx + \int \varphi^{(z)}(x)\,\delta z\,dx + \int \varphi^{(t)}(x)\,\delta t\,dx + \int \varphi^{(u)}(x)\,\delta u\,dx + \ldots$$

$$+ \Omega^{(y)}_{(2)} + \Omega^{(z)}_{(2)} + \Omega^{(t)}_{(2)} + \Omega^{(u)}_{(2)} \ldots + W_{(2)}\,\delta b$$

$$- \Omega^{(y)}_{(1)} - \Omega^{(z)}_{(1)} - \Omega^{(t)}_{(1)} - \Omega^{(u)}_{(1)} \ldots - W_{(1)}\,\delta a$$

$$= o \quad (A.)$$

darstellen, welche, indem man die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, unabhängig von jeder besondern Form für δx, δy, $\delta z \ldots$, jedoch rücksichtlich der Bedingungen für die Grenzen statt findet. Wie auch diese Bedingungen lauten mögen, werden dennoch, da δx, δy, δz u. s. w. als denselben genügend angesehen werden, die Formen

$$\delta x + f^{(x)}(x)\,\{(x-a).(x-b)\}^{\varrho}$$

$$\delta y + f^{(y)}(x)\,\{(x-a).(x-b)\}^{m+\varrho'}$$

$$\delta z + f^{(z)}(x)\,\{(x-a).(x-b)\}^{n+\varrho''}$$

$$\delta t + f^{(t)}(x)\,\{(x-a).(x-b)\}^{p+\varrho'''}$$

$$\delta u + f^{(u)}(x)\,\{(x-a).(x-b)\}^{q+\varrho^{IV}}$$

u. s. w.

wo unter $f^{(x)}(x)$, $f^{(y)}(x)$, $f^{(z)}(x)$ ... ganz beliebige, jedoch $(x-a)$ und $(x-b)$ nicht als Divisoren enthaltende Funktionen von x, und unter ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' ... beliebige positive Zahlen gedacht werden, eben diesen Bedingungen entsprechen, weil diese Formen sich, für $x=a$ und $x=b$, auf δx, δy, δz, δt, δu ... jene Bedingungen erfüllend, reduciren. Substituirt man daher diese Formen anstatt δx, δy, δz ... in der Gleichung (A), und zieht diese von der resultirenden Gleichung ab; so erhält man

$$\int\varphi^{(y)}(x)f^{(y)}(x)\left\{(x-a)(x-b)\right\}^{m+\varrho'}dx+\int\varphi^{(z)}(x)f^{(z)}(x)\left\{(x-a)(x-b)\right\}^{n+\varrho''}dx$$

$$+\int\varphi^{(t)}(x)f^{(t)}(x)\left\{(x-a)(x-b)\right\}^{p+\varrho'''}dx+\int\varphi^{(u)}(x)f^{(u)}(x)\left\{(x-a)(x-b)\right\}^{q+\varrho^{IV}}dx$$

u. s. w.

$$=o$$

die Integrale von $x=a$ bis $x=b$ genommen. Da die Grössen $f^{(y)}(x)$, $f^{(z)}(x)$, $f^{(t)}(x)$ ... als vollkommen unabhängig von einander gedacht werden, so hat man einzeln

$$\int\varphi^{(y)}(x)f^{(y)}(x)\left\{(x-a)(x-b)\right\}^{m+\varrho'}dx=o,$$

$$\int\varphi^{(z)}(x)f^{(z)}(x)\left\{(x-a)(x-b)\right\}^{n+\varrho''}dx=o,$$

$$\int\varphi^{(t)}(x)f^{(t)}(x)\left\{(x-a)(x-b)\right\}^{p+\varrho'''}dx=o,$$

$$\int\varphi^{(u)}(x)f^{(u)}(x)\left\{(x-a)(x-b)\right\}^{q+\varrho^{IV}}dx=o,$$

u. s. w.

die Integrale von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt; welche Gleichungen

also unabhängig von $f^{(y)}(x)$, $f^{(z)}(x)$, $f^{(t)}(x)$, $f^{(u)}(x)$ ... und unabhängig von den etwaigen Bedingungsgleichungen für die Grenzen statt finden. Auf eine, der obigen ganz ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass diese Gleichungen nicht statt haben können, wenn nicht die Grössen $\varphi^{(y)}(x)$, $\varphi^{(z)}(x)$, $\varphi^{(t)}(x)$, $\varphi^{(u)}(x)$ ... identisch gleich Null sind.

Wie daher auch die Bedingungen hinsichtlich der Grenzen beschaffen seyn mögen, so zerfällt, wofern nur y, z, t, u ... unabhängig von einander sind, die Gleichung (A), unter allen Umständen, erstlich in die allgemeinen Gleichungen des Maximums oder Minimums

$$\varphi^{(y)}(x) = o, \ \varphi^{(z)}(x) = o, \ \varphi^{(t)}(x) = o, \ \varphi^{(u)}(x) = o, \text{ u. s. w.};$$

und zweitens in die Gleichung für die Grenzen

$$\left.\begin{array}{l} \Omega^{(y)}_{(2)} + \Omega^{(z)}_{(2)} + \Omega^{(t)}_{(2)} + \Omega^{(u)}_{(2)} + \ldots + W_{(2)}\,\delta b \\ - \Omega^{(y)}_{(1)} - \Omega^{(z)}_{(1)} - \Omega^{(t)}_{(1)} - \Omega^{(u)}_{(1)} - \ldots - W_{(1)}\,\delta a \end{array}\right\} = o.$$

Setzt man endlich anstatt dieser abgekürzten Bezeichnung die Symbole des §. 22; so erlangt man als allgemeine Gleichungen des Maximums oder Minimums

$$\left.\begin{array}{l} Y + {}^{1\ldots m}\overset{r}{\Sigma} \pm \dfrac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} = o, \quad Z + {}^{1\ldots n}\overset{r}{\Sigma} \pm \dfrac{d^r \overset{r}{Z}}{dx^r} = o, \\ T + {}^{1\ldots p}\overset{r}{\Sigma} \pm \dfrac{d^r \overset{r}{Y}}{dx^r} = o, \quad U + {}^{1\ldots q}\overset{r}{\Sigma} \pm \dfrac{d^r \overset{r}{U}}{dx^r} = o, \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \text{(I.)}$$

und als Grenzgleichung

$$+\delta y_{(2)}\overset{r}{{}^{1\ldots m}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-1}}+\frac{d\delta y_{(2)}}{db}\overset{r}{{}^{2\ldots m}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-2}}+\frac{d^2\delta y_{(2)}}{db^2}\overset{r}{{}^{3\ldots m}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{Y}_{(2)}}{db^{r-3}}+\ldots\mp\frac{d^{m-1}\delta y_{(2)}}{db^{m-1}}\overset{m}{Y}_{(2)}$$

$$+\delta z_{(2)}\overset{r}{{}^{1\ldots n}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{Z}_{(2)}}{db^{r-1}}+\frac{d\delta z_{(2)}}{db}\overset{r}{{}^{2\ldots n}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{Z}_{(2)}}{db^{r-2}}+\frac{d^2\delta z_{(2)}}{db^2}\overset{r}{{}^{3\ldots n}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{Z}_{(2)}}{db^{r-3}}+\ldots\mp\frac{d^{n-1}\delta z_{(2)}}{db^{n-1}}\overset{n}{Z}_{(2)}$$

$$+\delta t_{(2)}\overset{r}{{}^{1\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{T}_{(2)}}{db^{r-1}}+\frac{d\delta t_{(2)}}{db}\overset{r}{{}^{2\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{T}_{(2)}}{db^{r-2}}+\frac{d^2\delta t_{(2)}}{db^2}\overset{r}{{}^{3\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{T}_{(2)}}{db^{r-3}}+\ldots\mp\frac{d^{p-1}\delta t_{(2)}}{db^{p-1}}\overset{p}{T}_{(2)}$$

$$+\delta u_{(2)}\overset{r}{{}^{1\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{U}_{(2)}}{db^{r-1}}+\frac{d\delta u_{(2)}}{db}\overset{r}{{}^{2\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{U}_{(2)}}{db^{r-2}}+\frac{d^2\delta u_{(2)}}{db^2}\overset{r}{{}^{3\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{U}_{(2)}}{db^{r-3}}+\ldots\mp\frac{d^{q-1}\delta u_{(2)}}{db^{q-1}}\overset{q}{U}_{(2)}$$

u. s. w.

$$-\delta y_{(1)}\overset{r}{{}^{1\ldots m}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-1}}-\frac{d\delta y_{(1)}}{da}\overset{r}{{}^{2\ldots m}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-2}}-\frac{d^2\delta y_{(1)}}{da^2}\overset{r}{{}^{3\ldots m}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{Y}_{(1)}}{da^{r-3}}-\ldots\pm\frac{d^{m-1}\delta y_{(1)}}{da^{m-1}}\overset{m}{Y}_{(1)}$$

$$-\delta z_{(1)}\overset{r}{{}^{1\ldots n}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{Z}_{(1)}}{da^{r-1}}-\frac{d\delta z_{(1)}}{da}\overset{r}{{}^{2\ldots n}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{Z}_{(1)}}{da^{r-2}}-\frac{d^2\delta z_{(1)}}{da^2}\overset{r}{{}^{3\ldots n}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{Z}_{(1)}}{da^{r-3}}-\ldots\pm\frac{d^{n-1}\delta z_{(1)}}{da^{n-1}}\overset{n}{Z}_{(1)}$$

$$-\delta t_{(1)}\overset{r}{{}^{1\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{T}_{(1)}}{da^{r-1}}-\frac{d\delta t_{(1)}}{da}\overset{r}{{}^{2\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{T}_{(1)}}{da^{r-2}}-\frac{d^2\delta t_{(1)}}{da^2}\overset{r}{{}^{3\ldots p}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{T}_{(1)}}{da^{r-3}}-\ldots\pm\frac{d^{p-1}\delta t_{(1)}}{da^{p-1}}\overset{p}{T}_{(1)}$$

$$-\delta u_{(1)}\overset{r}{{}^{1\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-1}\overset{r}{U}_{(1)}}{da^{r-1}}-\frac{d\delta u_{(1)}}{da}\overset{r}{{}^{2\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-2}\overset{r}{U}_{(1)}}{da^{r-2}}-\frac{d^2\delta u_{(1)}}{da^2}\overset{r}{{}^{3\ldots q}}\Sigma\mp\frac{d^{r-3}\overset{r}{U}_{(1)}}{da^{r-3}}-\ldots\pm\frac{d^{q-1}\delta u_{(1)}}{da^{q-1}}\overset{q}{U}_{(1)}$$

u. s. w.

$$+W_{(2)}\,\delta b-W_{(1)}\,\delta a$$

$$=0\quad(II.)$$

§. 58.

In Beziehung auf die Gleichungen (I.) fällt zu bemerken, dass es deren stets so viele geben wird, als relativ-unabhängige Grössen in W vorhanden sind. Betrachten wir die Ordnungszahlen der höchsten Differenzial-Verhältnisse, in W enthalten, m, n, p, $q \ldots$, alle als verschieden von einander, und, z. B. q als die grösste; so wird, im Allgemeinen, die erste Differenzialgleichung von der $(m+q)^{\text{ten}}$, die zweite von der $(n+q)^{\text{ten}}$, die dritte von der $(p+q)^{\text{ten}}$, die vierte von der $2q^{\text{ten}}$ Ordnung seyn, u. s. w. Die Anzahl der Constanten, welche die gesuchten primitiven Gleichungen zusammen enthalten werden, wird demnach, so fern ausser y, z, t und u keine andere relativ-unabhängige Grössen vorhanden sind, $(m+n+p+5q)$ seyn. Um sich hiervon klar zu überzeugen, braucht man nur zu überlegen, dass aus den vier Gleichungen (I), welche y, z, t und u zugleich enthalten, Behuf der Integration, vermittelst Differenziation und Elimination, vier andere abgeleitet werden können, von denen jede nur Eine dieser Grössen enthält, und welche daher alle von höhern Ordnungen, als die vorgegebenen seyn werden. Nehmen wir nun an, dass die Differenzialgleichung für y von der μ^{ten}, die für z von der ν^{ten}, die für t von der π^{ten}, die für q von der ϱ^{ten} Ordnung sei; so werden die primitiven Gleichungen zusammen anfänglich $(\mu+\nu+\pi+\varrho)$ Constanten enthalten. Da aber zugleich $\{\mu-(m+q)\}$ Gleichungen aus der ersten, $\{\nu-(n+q)\}$ Gleichungen aus der zweiten, $\{\pi-(p+q)\}$ Gleichungen aus der dritten, und $(\varrho-2q)$ Gleichungen aus der vierten, also zusammen $\{(\mu+\nu+\pi+\varrho)-(m+n+p+5q)\}$ ausser den gegeben vorhanden sind, denen Genüge geschehen muss; so werden dadurch eben so viele der Constanten bestimmt werden, mithin nur $(m+n+p+5q)$ beliebig bleiben.

Was die Grenzgleichung (*II.*) anbelangt, so leuchtet es ein, dass dieselbe, wie auch die Bedingungen für die Grenzen beschaffen seyn mögen, unter Berücksichtigung der Variation von x, stets auf $2(m+n+p+q+1)$ andere zurückkommen wird. Denkt man sich daher in diesen anstatt y, z, t und u die aus (*I*), in x und jenen $(m+n+p+5q)$ beliebigen Constanten, gefundenen Werthe substituirt; so wird man $2(m+n+p+q+1)$ Gleichungen zwischen diesen Constanten und den beiden für x zu bestimmenden Grenzwerthen a und b, also zwischen $(m+n+p+5q+2)$ unbekannten Grössen haben, durch welche eben so viele derselben bestimmt, und folglich $(3q-m-n-p)$ unbestimmt bleiben werden. Die oben aufgestellte Frage wird daher, allgemein zu reden, keiner bestimmten Beantwortung fähig seyn, eben weil ihr, so lange nicht die, zur Bestimmung der $(3q-m-n-p)$ Constanten, nöthigen Bedingungen hinzugefügt werden, die erforderliche Bestimmtheit fehlt. Zugleich sieht man aber, dass die Unbestimmtheit wegfällt, wenn $(3q-m-n-p) = o$, d. h. $m=n=p=q$ ist, weil alsdann die Anzahl der Gleichungen der Anzahl der Unbekannten gleich ist. Wiewohl nun in allen übrigen Fällen die Aufgabe, im eigentlichsten Sinne, eine unbestimmte zu nennen ist, so verhindert dieses dennoch keinesweges, die allgemeine Form des vorigen §'s festzuhalten, so fern man sich dieselbe nur von den, zur Bestimmung jener beliebigen Constanten, erforderlichen Bedingungsgleichungen begleitet denkt. Im Uebrigen gelten die §. 45 gemachten Bemerkungen auch hier in ihrem ganzen Umfange.

Sind nun die Grössen $x, y, z, t, u \ldots$ und deren Differenzial-Coefficienten durch keine anderweitigen Bedingungen irgend einer Art mit einander verbunden, so lässt sich auf eine, der obigen ganz ähnliche Weise zeigen, dass die Gleichung (*II*) nicht statt finden kann,

wenn sie nicht Glied für Glied statt findet. In diesem Falle erhält man also die $2(m+n+p+q+1)$ Gleichungen unmittelbar, wenn man die Coefficienten der Variationen einzeln gleich Null setzt.

Sind aber mit Beziehung auf die Grenzen die Bedingungsgleichungen

$$W^{(1)} = o, \; W^{(2)} = o, \; W^{(3)} = o \; . \; . \; . \; W^{(r)} = o$$

gegeben, so wird man daraus die variirten Gleichungen

$$\delta W^{(1)} = o, \; \delta W^{(2)} = o, \; \delta W^{(3)} = o \; . \; . \; . \; \delta W^{(r)} = o$$

ableiten, und, nachdem man jede mit einem unbestimmten Factor multiplicirt hat, zu der Grenzgleichung (II) hinzu addiren können. Die Coefficienten der Variationen in der Resultante, einzeln gleich Null gesetzt, werden $2(m+n+p+q+1)$ Gleichungen verschaffen, aus denen sich, in Verein mit den r gegebenen, nach der Elimination jener Factoren, eben so viele Constanten werden bestimmen lassen.

Was endlich das Criterium

$\delta^2 V < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum,

unabhängig von δx, δy, δz, δt . . . anbelangt, so ist hier auf eine, der vorigen vollkommen analoge Weise zu verfahren.

§. 59.

Es sei, zur Erläuterung der Methode,

$$V = \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen, welche Form der Bedingung $m = n = p = q$ entspricht. Alsdann ist

$$\delta V = \int \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} dx + \delta x \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}$$

von $x = a$ bis $x = b$ erstrekt.

Da nun

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} dx = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} \delta y$$

$$- \int d. \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} . \delta y,$$

und

$$\int \frac{\frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} dx = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} \delta z$$

$$- \int d. \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} . \delta z$$

ist; so hat man

$$\delta V = - \int d. \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} \delta y - \int d. \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} \delta z$$

$$+\frac{\frac{dy_{(2)}}{db}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy_{(2)}}{db}\right)^2+\left(\frac{dz_{(2)}}{db}\right)^2\right\}}}\delta y_{(2)}+\frac{\frac{dz_{(2)}}{db}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy_{(2)}}{db}\right)^2+\left(\frac{dz_{(2)}}{db}\right)^2\right\}}}\delta z_{(2)}$$

$$-\frac{\frac{dy_{(1)}}{da}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy_{(1)}}{da}\right)^2+\left(\frac{dz_{(1)}}{da}\right)^2\right\}}}\delta y_{(1)}-\frac{\frac{dz_{(1)}}{da}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy_{(1)}}{da}\right)^2+\left(\frac{dz_{(1)}}{da}\right)^2\right\}}}\delta z_{(1)}$$

$$+\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy_{(2)}}{db}\right)^2+\left(\frac{dz_{(1)}}{db}\right)^2\right\}}\delta b-\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy_{(1)}}{da}\right)^2+\left(\frac{dz_{(1)}}{da}\right)^2\right\}}\delta a$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Die allgemeinen Gleichungen des Maximums oder Minimums sind demnach

$$d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}=0,\quad d.\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}=0,$$

welche, indem man sie integrirt,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}=\alpha,\quad \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}=\beta,$$

mithin

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha}{\beta}\frac{dz}{dx}$$

geben. Substituirt man diese Relation in den beiden vorigen Gleichungen, so kommt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}},$$

folglich, indem man integrirt,

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\, x + \gamma, \quad z = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\, x + \varepsilon,$$

wo α, β, γ, ε beliebige Constanten bezeichnen.

Substistuirt man diese Werthe von y und z in dem von dem Integrations-Zeichen befreiten Theil von δV, so erhält man als Grenzgleichung

$$\alpha\delta y_{(2)} + \beta\delta z_{(2)} - \alpha\delta y_{(1)} - \beta\delta z_{(1)} + \frac{\delta b}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}} - \frac{\delta a}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}} = 0.$$

Sind nun keine anderweitigen Bedingungen für die Grenzen gegeben, sondern werden unter allen Relationen zwischen y, z und x, und unter allen Grenzwerthen für x, solche gefragt, die V zu einem Maximum oder Minimum machen; so sind $\delta y_{(2)}$, $\delta z_{(2)}$, δb; $\delta y_{(1)}$, $\delta z_{(1)}$, δa als ganz beliebige, von einander unabhängige Grössen zu betrachten, und man hat alsdann

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}} = 0,$$

die auf $1 = 0$ führen, welches zeigt, dass es in dem so eben ausgesprochenen Sinne weder ein Maximum noch ein Minimum giebt.

Sind hingegen $y_{(2)}$, $z_{(2)}$, b; $y_{(1)}$, $z_{(1)}$, a bestimmt und gegeben, so dass unter allen Relationen zwischen y, z und x, welche, für $x=a$ und $x=b$, für y und z dieselben gegebenen Werthe liefern, diejenigen gefragt werden, welche $V = \int W dx$, das Integral von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt, zu einem Maximum oder Minimum machen; so sind offenbar die Variationen jener Grössen einzeln gleich Null. Die

Grenzgleichung findet alsdann von selbst statt, und die vier Constanten α, β, γ, ε müssen durch jene für $y_{(2)}$, $z_{(2)}$; $y_{(1)}$, $z_{(1)}$ gegebenen, $x=a$ und $x=b$ entsprechenden Werthe bestimmt werden.

Lauten die Bedingungen anders, so wird rücksichtlich dieser nach der oben dargestellten Methode zu verfahren seyn.

Endlich, da

$$\delta^2 V = \int \frac{\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2 + \left\{\frac{dz}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dy}{dx}\frac{d\delta z}{dx}\right\}^2}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

$$= \int (1-\alpha^2-\beta^2)^{\frac{1}{2}} \left[(1-\alpha^2-\beta^2)\left\{\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\delta z}{dx}\right)^2\right\} + \left\{\beta\left(\frac{d\delta y}{dx}\right) + \alpha\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)\right\}^2 \right] dx$$

ist, und die Radical-Grösse als positiv gedacht wird; so ist es einleuchtend, das V ein Minimum seyn wird.

§. 60.

Legt man sich die geometrische Aufgabe vor: Die kürzeste Linie zwischen gegebenen Grenzen zu finden; so gelangt man zu denselben Formeln. Denn bezeichnet man die Coordinaten durch x, y, z, von denen y und z als Funktionen von x betrachtet werden, und die Länge des Bogens durch V; so hat man bekanntlich

$$V = \int dx \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}},$$

welcher Ausdruck also, innerhalb der gegebenen Grenzen genommen, ein Minimum seyn muss.

Dem obigen Calcül gemäss ist

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\, x + \gamma, \quad z = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\, x + \varepsilon,$$

woraus hervorgeht, dass die gesuchte Linie eine gerade ist.

1) Wird nun die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten gesucht; so sind die sechs Coordinaten der beiden Endpunkte $a, y_{(1)}, z_{(1)}; b, y_{(2)}, z_{(2)}$ bekannt, und die obigen Constanteu dergestalt zu bestimmen, dass die Linie durch diese beiden Punkte gehe.

2) Wird aber die kürzeste Linie zwischen einem Punkte und einer andern Linie gefragt, gegeben durch die Coordinaten $a, y_{(1)}, z_{(1)}$, und die Gleichungen

$$\varphi_{(2)}(x, \overset{2}{y}) = o, \quad \Psi_{(2)}(x, \overset{2}{z}) = o;$$

so haben die beiden Linien, repräsentirt durch die zwei Systeme von Gleichungen

$x=x, y=y, z=z; x=x+k\delta x$, und, so fern $x=x, y=y+k\delta y, z=z+k\delta z$ erstlich den Gleichungen

$$x = a, \; y = y_{(1)}, \; z = z_{(1)};$$

und zweitens den Gleichungen

$$x = b, \; \varphi_{(2)}(x, \overset{2}{y}) = o, \; \Psi_{(2)}(x, \overset{2}{z}) = o$$

zu genügen, und zwar unabhängig von k.

Aus der ersten Bedingung entspringt

$$\delta a = o, \; \delta y_{(1)} = o, \; \delta z_{(1)} = o, \; (I.)$$

und aus der zweiten, indem man, für $x = b$, y und z mit $y_{(2)}, z_{(2)}$ bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\left(\frac{d\varphi_{(2)}}{db}\right)+\left(\frac{d\varphi_{(2)}}{d\overset{2}{y}_{(2)}}\right)\frac{dy_{(2)}}{db}\right\}\delta b + \left(\frac{d\varphi_{(2)}}{d\overset{2}{y}_{(2)}}\right)\delta y_{(2)} = o, \\ &\left\{\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)+\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{z}_{(2)}}\right)\frac{dz_{(2)}}{db}\right\}\delta b + \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{z}_{(2)}}\right)\delta z_{(2)} = o. \end{aligned}\right\} (\text{§.51, S.134.})$$

Von einer andern Seite ist aber, da

$$\varphi_{(2)}(x, \overset{2}{y}) = o, \quad \Psi_{(2)}(x, \overset{2}{z}) = o$$

in Beziehung auf x identisch sind,

$$\left(\frac{d\varphi_{(2)}}{db}\right) + \left(\frac{d\varphi_{(2)}}{d\overset{2}{y}_{(2)}}\right)\frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db} = o, \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right) + \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{z}_{(2)}}\right)\frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db} = o.$$

Verbindet man diese Gleichungen mit den vorigen, so erlangt man die einfachern

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dy_{(2)}}{db} - \frac{d\overset{2}{y}_{(1)}}{db}\right)\delta b + \delta y_{(2)} = o, \\ \left(\frac{dz_{(2)}}{db} - \frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db}\right)\delta b + \delta z_{(2)} = o. \end{array}\right\}(II.)$$

Eliminirt man nun ferner vermittelst der fünf Gleichungen (*I.*) und (*II.*) die Variationen δa, $\delta y_{(1)}$, $\delta z_{(1)}$; $\delta y_{(2)}$, $\delta z_{(2)}$, um ein allgemeineres Resultat zu erhalten, aus dem von dem Integrations-Zeichen befreiten Theile von δV des vorigen §'s; so erhält man als Grenzgleichung

$$1 + \frac{dy_{(2)}}{db} \cdot \frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db} + \frac{dz_{(2)}}{db} \cdot \frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db} = o,$$

durch welche, in Verbindung mit den fünf für die Grenzen gegebenen, und den vier, aus den Gleichungen der gefundenen Linie, für die Grenzen abgeleiteten, die zehn Grössen $a, y_{(1)}, z_{(1)}$; $b, y_{(2)}, z_{(2)}$; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ bestimmt sind.

Um sich die geometrische Beziehung letzterer Gleichung zu verdeutlichen, braucht man nur zu überlegen, dass die Gleichungen

$$y = \frac{dy_{(2)}}{db}x + \mu, \quad z = \frac{dz_{(2)}}{db}x + \nu,$$

wo $\frac{dy_{(2)}}{db}$, $\frac{dz_{(2)}}{db}$, μ und ν als constant angesehen werden, eine gerade Linie repräsentiren, welche die gesuchte Curve in dem Punkte, dessen Abcisse gleich b ist, berührt; ferner, dass, auf dieselbe Weise, die Gleichungen

$$y = \frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db}\, x + \pi,\ z = \frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db} + \varsigma$$

eine Gerade darstellen, welche die Grenzlinie in einem Punkte berührt, dessen Abcisse gleich $\bar{b}$ ist; endlich dass von dem Winkel, den zwei Linien, durch obige Gleichungen gegeben, mit einander bilden, der Cosinus gleich

$$\frac{1 + \frac{dy_{(2)}}{db} \cdot \frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db} + \frac{dz_{(2)}}{db} \cdot \frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db}}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy_{(2)}}{db}\right)^2 + \left(\frac{dz_{(2)}}{db}\right)^2\right\}\left\{1 + \left(\frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db}\right)^2 + \left(\frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db}\right)^2\right\}}}$$

ist. Da nun, der in Rede stehenden Gleichung zufolge, der Zähler dieses Bruches gleich Null ist; so wird der Cosinus jenes Winkels gleich Null und der Winkel selbst gleich 90° seyn. Hieraus ergiebt sich also der allgemeine Satz, dass die kürzeste Linie, welche zwischen einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Linie gezogen werden kann, diese Linie unter einem rechten Winkel schneidet.

3) Wird die kürzeste Linie zwischen zwei andern Linien gefordert, gegeben durch die Gleichungen

$$\varphi_{(1)}\,(x, \overset{1}{y}) = 0,\quad \Psi_{(1)}\,(x, \overset{1}{z}) = 0;$$
$$\varphi_{(2)}\,(x, \overset{2}{y}) = 0,\quad \Psi_{(2)}\,(x, \overset{2}{z}) = 0;$$

von denen die beiden ersten sich auf die erste, die beiden letzten hingegen sich auf die letzte Grenze beziehen: so haben die beiden Linien, repräsentirt durch die zwei Systeme von Gleichungen

$$x = x,\ y = y,\ z = z;$$

$x = x + k\delta x$, und, so fern $x = x,\ y + k\delta y,\ z + k\delta z$,

für $x = a$ den Gleichungen

$$\varphi_{(1)}\,(x,\ \overset{1}{y}) = o,\quad \Psi_{(1)}\,(x,\ \overset{1}{z}) = o;$$

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\,x + \gamma,\ z = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\,x + \varepsilon;$$

und für $x = b$ den Gleichungen

$$\varphi_{(2)}\,(x,\ \overset{2}{y}) = o,\quad \Psi_{(2)}\,(x,\ \overset{2}{z}) = o;$$

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\,x + \gamma,\quad z = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\,x + \varepsilon,$$

unabhängig von k, zu genügen. Auf eine, der obigen ganz ähnliche Weise ergeben sich hieraus

$$\left(\frac{dy_{(1)}}{da} - \frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da}\right)\delta a + \delta y_{(1)} = o,$$

$$\left(\frac{dz_{(1)}}{da} - \frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da}\right)\delta a + \delta z_{(1)} = o,$$

$$\left(\frac{dy_{(2)}}{db} - \frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db}\right)\delta b + \delta y_{(2)} = o,$$

$$\left(\frac{dz_{(2)}}{db} - \frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db}\right)\delta b + \delta z_{(2)} = o.$$

Eliminirt man nun vermittel t dieser Gleichungen die Variationen $\delta y_{(1)}$, $\delta z_{(1)}$; $\delta y_{(2)}$, $\delta z_{(2)}$, um ein allgemeineres Resultat zu erhalten, aus dem von dem Integrations-Zeichen befreiten Theile von δV des vorigen §'s; so kommt die Grenzgleichung auf

$$1 + \frac{dy_{(1)}}{da}\,\frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da} + \frac{dz_{(1)}}{da}\,\frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da} = o,$$

$$1 + \frac{dy_{(2)}}{db}\,\frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db} + \frac{dz_{(2)}}{db}\,\frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db} = o,$$

zurück, aus denen hervorgeht, dass die gesuchte Linie die beiden Grenzlinien unter rechten Winkeln schneiden muss. Da nun die gesuchte Linie eine gerade ist; so haben wir den Satz, dass die kürzeste Linie, die zwischen zwei gegebenen Linien gezogen werden kann, eine gerade ist, welche diese unter rechten Winkeln durchscneidet.

Uebrigens sieht man leicht, dass durch die zwei zuletzt gewonnenen Gleichungen, in Verbindung mit den acht obigen, die sechs Coordinaten der beiden Endpunkte und die vier Constanten bestimmt sind.

4) Wird die kürzeste Linie zwischen einer andern Linie und einer Oberfläche gesucht, von denen die erstere durch die Gleichungen

$$\varphi_{(1)}(x, \overset{1}{y}) = o, \quad \Psi_{(1)}(x, \overset{1}{z}) = o,$$

und die letztere durch die Gleichung

$$\Psi_{(2)}(x, \overset{2}{y}, \overset{2}{z}) = o$$

gegeben ist; so haben jene Systeme für $x = a$ den Gleichungen

$$\varphi_{(1)}(x, \overset{1}{y}) = o, \quad \Psi_{(1)}(x, \overset{1}{z}) = o,$$

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\, x + \gamma, \quad z = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\, x + \varepsilon;$$

und für $x = b$ den Gleichungen

$$\Psi_{(2)}(x, \overset{2}{y}, \overset{2}{z}) = o,$$

$$y = \frac{\alpha}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\, x + \gamma, \quad z = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\alpha^2-\beta^2)}}\, x + \varepsilon$$

zu entsprechen. Aus den ersten ergeben sich, wie vorhin,

$$\left(\frac{\mathrm{d}y_{(1)}}{\mathrm{d}a} - \frac{\mathrm{d}\overset{1}{y}_{(1)}}{\mathrm{d}a}\right) \delta a + \delta y_{(1)} = o, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}z_{(1)}}{\mathrm{d}a} - \frac{\mathrm{d}\overset{1}{z}_{(1)}}{\mathrm{d}a}\right) \delta a + \delta z_{(1)} = o; \quad (2)$$

und aus den letzten entspringt zunächst

$$\left\{\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)+\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{{}^{2}dy_{(2)}}\right)\frac{dy_{(2)}}{db}+\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{{}^{2}dz_{(2)}}\right)\frac{dz_{(2)}}{db}\right\}\delta b+\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{{}^{2}dy_{(2)}}\right)\delta y_{(2)}+\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{{}^{2}dz_{(2)}}\right)\delta z_{(2)}$$

$$= o, \quad (3).$$

Da ferner, unter diesen Umständen, die beiden Grenzen vollkommen unabhängig von einander sind; so zerfällt die allgemeine Gleichung für dieselben in

$$\frac{dy_{(1)}}{da}\delta y_{(1)}+\frac{dz_{(1)}}{da}\delta z_{(1)}+\left\{1+\left(\frac{dy_{(1)}}{da}\right)^2+\left(\frac{dz_{(1)}}{da}\right)^2\right\}\delta a = o, \quad (4)$$

$$\frac{dy_{(2)}}{db}\delta y_{(2)}+\frac{dz_{(2)}}{db}\delta z_{(2)}+\left\{1+\left(\frac{dy_{(2)}}{db}\right)^2+\left(\frac{dz_{(2)}}{db}\right)^2\right\}\delta b = o. \quad (5)$$

Eliminirt man nun $\delta y_{(1)}$, $\delta z_{(1)}$ zwischen den Gleichungen (1), (2), (4); so erhält man die Gleichung

$$1+\frac{dy_{(1)}}{da}\,\frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da}+\frac{dz_{(1)}}{da}\,\frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da} = o,$$

welche zeigt, dass die gesuchte Linie die Grenzlinie unter einem rechten Winkel schneiden muss.

Eliminirt man δb zwischen (3) und (5), so zerfällt die Resultante, da $\delta y_{(2)}$ und $\delta z_{(2)}$ unabhängig von einander bleiben, in

$$\left\{\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{{}^{2}dy_{(2)}}\right)-\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)\frac{dy_{(2)}}{db}\right\}\left\{1+\left(\frac{dz_{(2)}}{db}\right)^2\right\}-\left\{\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{{}^{2}dz_{(2)}}\right)-\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)\frac{dz_{(2)}}{db}\right\}\frac{dy_{(2)}}{db}\,\frac{dz_{(2)}}{db}=o,$$

$$\left\{\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{{}^{2}dz_{(2)}}\right)-\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)\frac{dz_{(2)}}{db}\right\}\left\{1+\left(\frac{dy_{(2)}}{db}\right)^2\right\}-\left\{\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{{}^{2}dy_{(2)}}\right)-\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)\frac{dy_{(2)}}{db}\right\}\frac{dy_{(2)}}{db}\,\frac{dz_{(2)}}{db}=o,$$

welche offenbar zu den einfachern

$$\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{y}_{(2)}}\right) - \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)\frac{dy_{(2)}}{db} = o,$$

$$\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{z}_{(2)}}\right) - \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)\frac{dz_{(2)}}{db} = o$$

führen.

Um sich die geometrische Beziehung dieser Gleichungen zu verdeutlichen, braucht man nur zu überlegen, dass

$$\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right) x + \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{y}_{(2)}}\right) y + \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{z}_{(2)}}\right) z + \varrho = o$$

die Gleichung einer Ebene ist, welche die Fläche, repräsentirt durch die Gleichung

$$\Psi_{(1)}(x, \overset{2}{y}, \overset{2}{z}) = o,$$

in einem Punkte berührt, dessen Coordinaten b, $\overset{2}{y}_{(2)}$, $\overset{2}{z}_{(2)}$ sind. Eliminirt man aus dieser Gleichung vermittelst der beiden vorhergehenden die Grössen $\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{y}_{(2)}}\right)$, $\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{z}_{(2)}}\right)$; so entsteht die Gleichung

$$y = \frac{dy_{(2)}}{db} y + \frac{dz_{(2)}}{db} z + \frac{\varrho}{\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)} = o,$$

welche wiederum eine Ebene bezeichnet, senkrecht auf einer geraden Linie, deren Gleichungen

$$y = \frac{dy_{(2)}}{db} x + \mu, \quad z = \frac{dz_{(2)}}{db} x + \nu$$

sind. Da nun diese zugleich die Gleichungen einer Geraden sind, welche die gesuchte Curve in dem Punkte, dessen Coordinaten b, $y_{(2)}$, $z_{(2)}$ sind, berührt; so drücken die beiden obigen Gleichungen

aus, dass die gesuchte Linie die Grenzfläche unter einem rechten Winkel schneiden muss.

Das Resultat ist daher, dass die kürzeste Linie, welche zwischen einer andern Linie und einer Fläche gezogen werden kann, eine gerade ist, die beide senkrecht schneidet.

Uebrigens ist es einleuchtend, dass jene drei Grenzgleichungen in Verbindung mit den drei gegebenen, und den vier aus der gesuchten Linie abgeleiteten, zur Bestimmung der gefragten zehn Grössen hinreichen.

5) Wird endlich die kürzeste Linie zwischen zwei Flächen gefordert, welche durch die Gleichungen

$$\Psi_{(1)}\,(x, \overset{1}{y}, \overset{1}{z}) = o, \ (1), \quad \Psi_{(2)}\,(x, \overset{2}{y}, \overset{2}{z}) = o; \ (2)$$

gegeben sind; so haben die beiden, oben näher bezeichneten Systeme von Gleichungen, für $x=a$, die Gleichung (1) nebst denen der gesuchten Linie, und für $x=b$, ebenfalls diese nebst der Gleichung (2) zu erfüllen. Auf eine, der vorigen vollkommen ähnliche Weise ergeben sich hieraus die Grenzgleichungen

$$\left(\frac{d\Psi_{(1)}}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right) - \left(\frac{d\Psi_{(1)}}{da}\right)\frac{dy_{(1)}}{da} = o, \quad \left(\frac{d\Psi_{(1)}}{d\overset{1}{z}_{(1)}}\right) - \left(\frac{d\Psi_{(1)}}{da}\right)\frac{dz_{(1)}}{da} = o,$$

$$\left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{y}_{(2)}}\right) - \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)\frac{dy_{(2)}}{db} = o, \quad \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{d\overset{2}{z}_{(2)}}\right) - \left(\frac{d\Psi_{(2)}}{db}\right)\frac{dz_{(2)}}{db} = o,$$

aus welchen, in Verbindung mit den sechs oben erwähnten, jene zehn Grössen zu bestimmen sind, und zugleich hervorgeht, dass die kürzeste Linie, die zwischen zwei Flächen gezogen werden kann, beide senkrecht schneidet.

§. 61.

Bis hiezu betrachteten wir die relativ-unabhängigen Grössen y, z, t, u . . . als unabhängig von einander. Inzwischen ist auch der Fall denkbar, dass zwischen diesen Grössen eine oder mehrere Gleichungen vorhanden seien.

Es sei, wie vorhin,

$$W = F\left\{x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^my}{dx^m}; z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}; t, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}, \ldots \frac{d^pt}{dx^p}; u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^qu}{dx^q}, \ldots\right\},$$

und

$$V = \int W dx,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen, die Grösse, in Beziehung auf welche das Maximum oder das Minimum gefragt wird; endlich sei

$$L = o$$

eine der gegebenen Gleichungen, denen die gesuchten Funktionen, unabhängig von jedem besondern Werthe von x, zu genügen haben. Ist diese eine primitive, also von der Form

$$\varphi\,(x, y, z, t, u \ldots) = o,$$

so würde man allerdings damit anfangen können, vermittelst dieser Gleichung eine jener Grössen aus W zu eliminiren. Indess ist es einleuchtend, dass, wenn wir durch y, z, t, u . . . die Funktionen bezeichnen, welche der Gleichung genügen, $y + k\delta y$, $z + k\delta z$, $t + k\delta t$, $u + k\delta u$ . . . , so fern sie als Repräsentanten derjenigen Funktionen dienen sollen, von denen hier die Rede ist, derselben ebenfalls entsprechen müssen.

Dieses führt also zu der variirten Gleichung

$$\delta L = o,$$

d. h.

$$\left(\frac{dL}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dL}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dL}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dL}{du}\right)\delta u + \ldots = o,$$

welche statt findet, es sei auf die Variation von x Rücksicht genommen werde, oder nicht. In der That, es ist, unter Berücksichtigung der Variation von x,

$$\delta L = \left\{\left(\frac{dL}{dx}\right) + \left(\frac{dL}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dL}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dL}{dt}\right)\frac{dt}{dx} + \left(\frac{dL}{du}\right)\frac{du}{dt} + \ldots\right\}\delta x$$

$$+ \left(\frac{dL}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dL}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dL}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dL}{du}\right)\delta u + \ldots$$

Da aber die Gleichung

$$L = o$$

in Beziehung auf x als identisch angesehen wird, so hat man

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) + \left(\frac{dL}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dL}{dz}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{dL}{dt}\right)\frac{dt}{dx} + \left(\frac{dL}{du}\right)\frac{du}{dx} \ldots = o;$$

folglich

$$\delta L = \left(\frac{dL}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dL}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dL}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dL}{du}\right)\delta u + \ldots$$

Setzt man nun, der obigen abgekürzten Bezeichnung gemäss,

$$\delta V = \int \delta y\,\varphi^{(y)}(x)dx + \int \delta z\,\varphi^{(z)}(x)dx + \int \delta t\,\varphi^{(t)}(x)dx + \int \delta u\,\varphi^{(u)}(x)dx + \ldots + \Omega_{(1)} - \Omega_{(2)},$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt; so erlangt man die Gleichung

$$\int \delta y\,\varphi^{(y)}(x)dx + \int \delta z\,\varphi^{(z)}(x)dx + \int \delta t\,\varphi^{(t)}(x)dx + \int \delta u\,\varphi^{(u)}(x)dx + \ldots + \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o,$$

aus welcher man, vermittelst $\delta L = o$, eine von den sich unter dem Integrations-Zeichen befindenden Variationen sogleich wird eliminiren können. Ferner, da die Gleichung $\delta L = o$ in Beziehung auf x identisch ist, so wird man sich durch wiederholte Differenziation die nöthigen

Gleichungen verschaffen, um auch jene Variation aus dem, von dem Integrations-Zeichen befreiten Theile des obigen Ausdrucks zu eliminiren. Die resultirende Gleichung, welche freilich noch die Grösse selbst, deren Variation eliminirt worden ist, nebst deren Differenzial-Coefficienten enthält, nach der obigen Methode behandelt, wird, in Verbindung mit der gegebenen $L = o$, die zur Bestimmung der fraglichen Grössen erforderliche Anzahl Gleichungen darbiethen.

Es sei z. B. u die zu eliminirende Grösse. Eliminirt man zuförderst δu aus dem mit dem Integrationszeichen behafteten Theile von δV, vermittelst der Gleichung

$$\left(\frac{dL}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dL}{dz}\right)\delta z + \left(\frac{dL}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dL}{du}\right)\delta u + \ldots = o;$$

so geht jene Gleichung über in

$$\int \delta y \left\{ \varphi^{(y)}(x) - \varphi^{(u)}(x) . \frac{\left(\frac{dL}{dy}\right)}{\left(\frac{dL}{du}\right)} \right\} dx + \int \delta z \left\{ \varphi^{(z)}(x) - \varphi^{(u)}(x) . \frac{\left(\frac{dL}{dz}\right)}{\left(\frac{dL}{dz}\right)} \right\} dx$$

$$+ \int \delta t \left\{ \varphi^{(t)}(x) - \varphi^{(u)}(x) . \frac{\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\left(\frac{dL}{du}\right)} \right\} dx + \ldots + \Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o.$$

aus welcher sich ergeben

$$\varphi^{(y)}(x) - \varphi^{(u)}(x) \ \frac{\left(\frac{dL}{dy}\right)}{\left(\frac{dL}{du}\right)} = o,$$

$$\varphi^{(z)}(x) - \varphi^{(u)}(x) \ \frac{\left(\frac{dL}{dz}\right)}{\left(\frac{dL}{du}\right)} = o,$$

$$\varphi^{(t)}(x) - \varphi^{(u)}(x) \frac{\left(\frac{dL}{dt}\right)}{\left(\frac{dL}{du}\right)} = o,$$

u. s. w.

als allgemeine Gleichungen des Maximums oder Minimums; und

$$\Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o,$$

als Grenzgleichung.

Um also unter diesen Umständen die allgemeinen Gleichungen des Maximums oder Minimums zu erhalten, braucht man nur, vermittelst $\delta L = o$, aus dem Ausdrucke

$$\delta y\, \varphi^{(y)}(x) + \delta z \varphi^{(z)}(x) + \delta t \varphi^{(t)}(x) + \delta u \varphi^{(u)}(x) + \ldots$$

die Variation δu zu eliminiren, und den resultirenden Ausdruck, unabhängig von den zurückbleibenden Variationen, gleich Null zu setzen. Aber um diese Gleichungen zu gewinnen, können wir auch, nach Vorschrift von §. 38, die Gleichung $\delta L = o$, mit einem unbestimmten Factor λ multiplicirt, zu dem vorigen Ausdruck hinzuaddiren, und das Resultat, unabhängig von den Variationen, gleich Null setzen. Die Elimination von λ zwischen diesen, unmittelbar hervortretenden, Gleichungen wird alsdann die geforderten Endgleichungen verschaffen.

Um die Grenzgleichung $\Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o$ von der Variation von u befreit zu erhalten, ist es am bequemsten, zu dem unbestimmten Ausdruck für diese Grösse §. 23. zurück zu gehen. Da derselbe δu, $\frac{d\delta u}{dx}$, $\frac{d^2 \delta u}{dx^2}$, $\ldots \frac{d^{q-1} \delta u}{dx^{q-1}}$ enthält, so werden zur Elimination dieser Grössen eben so viele Gleichungen erforderlich seyn, die uns aber die Gleichung $\delta L = o$ in Verein mit ihren $(q-1)$ ersten Differen-

zialgleichungen verschaffen wird. Denken wir uns daher, um die Lösung dieser Aufgabe auf den bekannten Mechanismus zurück zu führen, jede dieser Gleichungen mit einem der unbestimmten Factoren $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$, . . . $\lambda^{(q)}$ multiplicirt, und zu dem unbestimmten, durch Ω bezeichneten, Ausdruck hinzu addirt, so wird dss Resultat, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, so fern keine weitere Bedingungen mit Beziehung auf die Grenzen vorhanden sind, unabhängig von den darin enthaltenen Variationen gleich Null gesetzt, nach der Elimination jener Factoren, die nöthigen Endgleichungen darbiethen.

Uebrigens leuchtet es ein, dass, im Falle ausser der Gleichung $L = o$ noch mehrere $M = o$, $N = o$, u. s. w. vorhanden seyn sollten, hinsichtlich jeder derselben das bisher dargestellte Verfahren zu beobachten seyn würde.

Wird also das Maximum oder Minimum von $V = \int W dx$, von $x = a$ bis $x = b$ gefordert, und sind zugleich primitive Gleichungen zwischen den in W enthaltenen relativ-unabhängigen Grössen vorhanden; so kann diese Forderung, so fern man δV unbestimmt durch

$$\int \left\{dx\, \delta y \varphi^{(y)}(x) + \delta z \varphi^{(z)}(x) + \delta t \varphi^{(t)}(x) + \delta u \varphi^{(u)}(x) + \ldots\right\} + \Omega,$$

und jene Gleichungen durch

$$L = o, M = o, N = o \ldots$$

bezeichnet, auf die Bedingung zurückgeführt werden, dass ausser den Gleichungen

$$L = o, \quad M = o, \quad N = o \ldots$$

auch

$$\int dx \left\{\delta y \varphi^{(y)}(x) + \delta z \varphi^{(z)}(x) + \delta t \varphi^{(t)}(x) + \delta u \varphi^{(u)}(x) + \ldots + \lambda \delta L + \mu \delta M + \nu \delta N + \ldots\right\}$$

$$+\Omega+\lambda^{(1)}\delta L+\lambda^{(2)}\frac{d\delta L}{dx}+\lambda^{(3)}\frac{d^2\delta L}{dx^2}+\ldots+\lambda^{(q)}\frac{d^{q-1}\delta L}{dx^{q-1}}$$

$$+\mu^{(1)}\delta M+\mu^{(2)}\frac{d\delta M}{dx}+\mu^{(3)}\frac{d^2\delta M}{dx^2}+\ldots+\mu^{(q)}\frac{d^{p-1}\delta M}{dx^{p-1}}$$

$$+\nu^{(1)}\delta N+\nu^{(2)}\frac{d\delta N}{dx}+\nu^{(3)}\frac{d^2\delta N}{dx^2}+\ldots+\nu^{(n)}\frac{d^{n-1}\delta N}{dx^{n-1}}$$

u. s. w.

$= o,$

sei, von $x=a$ bis $x=b$ genommen, und unabhängig von den darin enthaltenen Variationen. Die hieraus unmittelbar hervortrenden Gleichungen nehmlich werden, nach der Elimination der unbestimmten Factoren λ, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ . . . ; μ, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ . . . ; ν, $\nu^{(1)}$, $\nu^{(2)}$ . . . in Verbindung mit den obern, die zur Lösung des Problems erforderlichen Endgleichungen darbiethen.

§. 62.

Um diese Methode durch ein Beispiel zu erläutern, sei

$$V=\int dx\, \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}},$$

und

$$L=x^2+y^2+z^2-r^2=o.$$

Alsdann ist, mit Rücksicht auf die Variation von x,

$$\delta V=-\int\delta y\, d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}-\int\delta z\, d.\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}$$

$$+\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}\delta y+\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}}\delta z$$

$$+\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}\delta x,$$

und

$$\delta L = 2\, y\delta y + 2\, z\delta z = o.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\lambda y + d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} = o,$$

$$\lambda z + d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} = o;$$

folglich, indem man λ eliminirt,

$$z\, d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} - y\ d.\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}}} = o,$$

aus welcher Gleichung, in Verbindung mit der gegebenen,

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = o,$$

die geforderten Relationen bestimmt werden müssen.

Setzt man zu diesem Ende

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = ds,$$

so geht jene Differenzial-Gleichung über in

$$zd\,\frac{dy}{ds} - y\,\frac{dz}{ds} = o, \quad (1)$$

mithin, indem man integrirt

$$\frac{zdy - ydz}{ds} = a. \quad (2)$$

Da aber

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} + \frac{dz^2}{ds^2} = 1,$$

und

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = o$$

ist, so hat man

$$\frac{dx}{ds}\,d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d.\frac{dz}{ds} = o, \quad (3)$$

und

$$x\,\frac{dx}{ds} + y\,\frac{dy}{ds} + z\,\frac{dz}{ds} = o;$$

mithin

$$\frac{dz}{ds} = -\,\frac{x}{z}\,\frac{dx}{ds} - \frac{y}{z}\,\frac{dy}{ds},$$

und

$$\frac{dz}{ds}\,d.\frac{dz}{ds} = -\,\frac{x}{z}\,\frac{dx}{ds}\,d.\frac{dz}{ds} - \frac{y}{z}\,\frac{dy}{ds}\,d.\frac{dz}{ds}.$$

Substituirt man diesen Werth in (3), so kommt

$$\frac{dx}{ds}\left\{d.\frac{dx}{ds} - \frac{x}{z}\,d.\frac{dz}{ds}\right\} + \frac{dy}{ds}\left\{d.\frac{dy}{ds} - \frac{y}{z}\,d.\frac{dz}{ds}\right\} = o.$$

Verbindet man diese Gleichung mit (1), so erlangt man

$$zd.\,\frac{dx}{ds} - x\,d.\,\frac{dz}{ds} = o;$$

folglich, indem man integrirt,

$$\frac{zdx - xdz}{ds} = \beta \ (4).$$

Eliminirt man d*s* zwischen (1) und (4), so kommt

$$zdx - xdz = \frac{\beta}{\alpha}(zdy - ydz);$$

mithin, indem man diese mit $\frac{1}{z^2}$ multiplicirt und darauf integrirt,

$$\frac{x}{z} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{y}{z} + \gamma,$$

oder

$$x = \frac{\beta}{\alpha}y + \gamma z,$$

aus welcher Gleichung sich, in Verbindung mit der gegebenen

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = o,$$

die gesuchten Werthe für y und z in x ergeben.

Legt man sich die geometrische Aufgabe vor: zwischen zweien auf einer Kugelfläche gegebenen Grenzen die kürzeste Linie zu finden; so gelangt man, indem man den Mittelunkt der Kugel zum Anfangspunkt der Coordinaten nimmt, zu denselben Gleichungen. Denn die Länge der Linie ist gleich $\int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, und die Gleichung für die Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = o$. Da nun diese Linie, dem obigen Calcül gemäss, durch letztere Gleichung in Verein mit

$$x = \frac{\beta}{\alpha}y + \gamma z$$

bestimmt wird, und diese Gleichung eine durch den Mittelpunkt der Kugelfläche gelegte Ebene bezeichnet; so folgt, dass die kürzeste Linie auf einer Kugelfläche vermittelst des Durchschnittes dieser mit

einer durch deren Mittelpunkt gelegten Ebene gebildet, mithin das Stück eines grössten Kreises seyn wird.

Was die Gleichung für die Grenzen betrifft, so ist von dieser schon zu oft die Rede gewesen, als dass sie noch einer fernern Erläuterung bedürfen sollte.

§. 63.

Ist aber die gegebene Bedingungsgleichung,

$$L = o, \quad (1)$$

eine Differenzial-Gleichung, mithin L von der Form

$$\varphi\left\{x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^my}{dx^m}; z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}; t, \frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}, \ldots \frac{d^pt}{dx^p}; u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots \frac{d^qu}{dx^q}, \ldots\right\};$$

so würde man, vermittelst dieser Gleichung, ebenfalls zuförderst eine der Grössen, z. B. u, nebst deren Differenzial-Coefficienten, aus W, in $V = \int W dx$, eliminiren, und darauf hinsichtlich des resultirenden Ausdruckes nach den obigen Vorschriften verfahren können. Auch würde man aus der gegebenen Gleichung $L = o$ zuerst die variirte Gleichung $\delta L = o$ ableiten, hieraus δu nach der früher dargestellten Methode entwickeln, und diese Grösse endlich aus δV eliminiren können. Inzwischen würde sowohl das eine, als das andere Verfahren zu sehr langweiligen und höchst beschwerlichen Vorrechnungen führen. Der Gang wird einfacher, wenn man die geforderte Elimination, anstatt sie auf einmal vorzunehmen, nach und nach in Ausführung bringt, welches den Vortheil gewährt, dass man gegen die unnöthigen Eliminationen, in welche man, wegen der mannigfaltigen Nebenbedingungen, deren die Aufgabe fähig bleibt, leicht verfallen könnte, alsdann vollkommen gesichert bleibt.

So fern es auf die Elimination von u abgesehen ist, wird stets, wie auch die Nebenbedingungen beschaffen seyn mögen, Kraft der Gleichung $L = o$, der unter dem Integrations-Zeichen befindliche Theil von δV, damit derselbe die allgemeinen Gleichungen des Maximums oder Minimums, von deren Integration die Lösung der Aufgabe abhängt, unmittelbar darbiethe, frei von δu seyn müssen, und es werden diese Gleichungen von den Nebenbedingungen, welchen die Aufgabe unterworfen werden kann, dem Vorhergehenden nach, vollkommen unabhängig seyn. Es ist daher von wesentlichem Interesse, die erste Sorge dahin zu wenden, vermittelst $\delta L = o$ aus δW einen Ausdruck abzuleiten, der dieser Bedingung entspreche.

Es sei zu diesem Ende

$$\delta W + \lambda \delta L = \delta W_{,} ,$$

wo λ einen, so gleich näher zu bestimmenden Factor bezeichnet, der Ausdruck, welcher der besagten Bedingung genügt; alsdann hat man, da $\delta L = o$ ist,

$$\delta V = \int \delta W_{,} \, \mathrm{d}x$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt gedacht.

Behält man daher die vorige Bezeichnung, nur mit dem Unterschiede bei, dass man die Buchstaben mit Absätzen behaftet, so hat man

$$\delta V = \int \delta y \left\{ Y_{,} + \overset{\mathrm{r}}{{}^{1\ldots(m)}\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}} \overset{\mathrm{r}}{Y_{,}}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} \right\} \mathrm{d}x + \int \delta z \left\{ Z_{,} + \overset{\mathrm{r}}{{}^{1\ldots(n)}\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}} \overset{\mathrm{r}}{Z_{,}}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} \right\} \mathrm{d}x$$

$$+ \int \delta t \left\{ T_{,} + \overset{\mathrm{r}}{{}^{1\ldots(p)}\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}} \overset{\mathrm{r}}{T_{,}}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} \right\} \mathrm{d}x + \int \delta u \left\{ U_{,} + \overset{\mathrm{r}}{{}^{1\ldots(q)}\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}} \overset{\mathrm{r}}{U_{,}}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} \right\} \mathrm{d}x \ldots$$

$$+ \Omega_{1},$$

von $x = a$ bis $x = b$ genommen, wo unter (m), (n), (p), (q) . . . diejenigen Zahlen verstanden werden, welche die höchsten, in $W_{,}$ enthaltenen Differenzial-Coefficienten von y, z, t . . . bezeichnen.

Damit nun der unter dem Integrations-Zeichen befindliche Theil dieses Ausdruckes von δu befreit sei, muss offenbar

$$U_{,} + {}^{1\ldots(q)}\overset{\mathrm{r}}{\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}\, \overset{\mathrm{r}}{U}_{,}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} = o \quad (2)$$

seyn; welche Gleichung also, da $U_{,}$, $\overset{1}{U}_{,}$, $\overset{2}{U}_{,}$ . . . den Factor λ enthalten, zur Bestimmung dieser Grösse eine Differenzial-Gleichung der $(q)^{\mathrm{ten}}$ Ordnung abgiebt.

Dieses vorausgesetzt, hat man, indem man den Werth von $\Omega_{,}$ für $x = a$ mit $\Omega_{,(1)}$, und für $x = b$ mit $\Omega_{,(2)}$ bezeichnet,

$$\int \delta y \left\{ Y_{,} + {}^{1\ldots(m)}\overset{\mathrm{r}}{\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}\, \overset{\mathrm{r}}{Y}_{,}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} \right\} \mathrm{d}x + \int \delta z \left\{ Z_{,} + {}^{1\ldots(n)}\overset{\mathrm{r}}{\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}\, \overset{\mathrm{r}}{Z}_{,}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} \right\} \delta x$$

$$+ \int \delta t \left\{ T_{,} + {}^{1\ldots(q)}\overset{\mathrm{r}}{\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}\, \overset{\mathrm{r}}{T}_{,}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} \right\} \mathrm{d}x \; . \; . \; . \; . + \Omega_{,(2)} - \Omega_{,(1)}$$

$$= o,$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ genommen; woraus sich also

$$Y_{,} + {}^{1\ldots(m)}\overset{\mathrm{r}}{\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}\, \overset{\mathrm{r}}{Y}_{,}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} = o, \quad (3),$$

$$Z_{,} + {}^{1\ldots(n)}\overset{\mathrm{r}}{\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}\, \overset{\mathrm{r}}{Z}_{,}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} = o, \quad (4),$$

$$T_{,} + {}^{1\ldots(p)}\overset{\mathrm{r}}{\Sigma} \pm \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{r}}\, \overset{\mathrm{r}}{T}_{,}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{r}}} = o, \quad (5)$$

u. s. w.

als allgemeine Gleichungen des Maximums oder Minimums, und

$$\Omega_{(2)} - \Omega_{(1)} = o \quad (6)$$

als Grenzgleichung ergeben, aus denen, in Verbindung mit (1) und (2) die Unbekannten des Problems bestimmt werden müssen.

Man wird nehmlich vermittelst der fünf ersten Differenzial-Gleichungen die Grössen y, z, t, u, λ in x bestimmen, darauf diese Grössen aus (6) eliminiren, und alsdann mit der Resultante nach Massgabe des übrigen, für die Grenzen etwa vorhandenen Bedingungen, auf die bekannte Weise, ferner verfahren können. Sind mehrere Bedingungsgleichungen zwischen den, in W enthaltenen, relativ-unabhängigen Grössen vorhanden, so wird man offenbar in Beziehung auf jede derselben diese Methode in Anwendung setzen können.

Die bisherigen Betrachtungen liefern also folgendes Resultat: Ist W irgend eine Funktion von x, y, z, t, u . . . und deren Differenzial-Coefficienten irgend welcher Ordnungen, und sind

$$L = o, \; M = o, \; N = o, \text{ u. s. w.}$$

gegebene Bedingungsgleichungen zwischen den relativ-unabhängigen Grössen und deren Differenzial-Quotienten, deren Anzahl jedoch stets um Eins weniger, als die von diesen Grössen vorausgesetzt wird; und verlangt man diese Grössen, als Funktionen von x, dergestalt zu bestimmen, dass $V = \int W dx$, das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen, ein Maximum oder Minimum werde: so suche man δL, δM, δN . . . und bilde den Ausdruck

$$\delta W + \lambda \delta L + \mu \delta M + \nu \delta N + \ldots = \delta W_{\prime},$$

wo λ, μ, ν . . . als unbestimmte, jedoch veränderliche Factoren betrachtet werden, und setze

$$\delta V = \int \delta W_{\prime} dx.$$

Vermittelst der §. 23 dargestellten Transformation wird diese Gleichung übergehen in

$$\delta V = \int \delta y \left\{ Y_{\prime} + {}^{1\ldots(m)}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}_{\prime}}{dx^r} \right\} dx + \int \delta z \left\{ Z_{\prime} + {}^{1\ldots(n)}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Z}_{\prime}}{dx^r} \right\} dx$$

$$+ \int \delta t \left\{ T_{\prime} + {}^{1\ldots(p)}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{T}_{\prime}}{dx^r} \right\} dx + \int \delta u \left\{ U_{\prime} + {}^{1\ldots(q)}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{U}_{\prime}}{dx^r} \right\} dx$$

u. s. w.

$$+ \Omega_{\prime},$$

und sich hieraus zunächst die allgemeinen Gleichungen des Maximums oder Minimums

$$Y_{\prime} + {}^{1\ldots(m)}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Y}_{\prime}}{dx^r} = o,$$

$$Z_{\prime} + {}^{1\ldots(n)}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{Z}_{\prime}}{dx^r} = o,$$

$$T_{\prime} + {}^{1\ldots(p)}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{T}_{\prime}}{dx^r} = o,$$

$$U_{\prime} + {}^{1\ldots(q)}\overset{r}{\Sigma} \pm \frac{d^r \overset{r}{U}_{\prime}}{dx^r} = o,$$

u. s. w.

ergeben, welche in Verbindung mit jenen gegebenen

$$L = o, \quad M = o, \quad N = o \quad \text{u. s. w.}$$

zur Bestimmung der Grössen y, z, t, u . . . λ, μ, ν . . . dienen wer-

den. Ferner wird der Ausdruck $\Omega_{,}$, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, die Grenzgleichung

$$\Omega_{,(2)} - \Omega_{,(1)} = o$$

verschaffen, welcher nebst den für die Grenzen etwa noch anderweitig gegebenen, durch eine zweckdienliche Bestimmung der Constanten genügt werden muss.

§. 64.

Zur Erläuterung dieser Methode sei

$$V = \int \mathrm{d}x \frac{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}}{\sqrt{z}},$$

und die gegebene Gleichung

$$L = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + az^n \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}} - g = o.$$

Alsdann ist

$$\delta W = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{z}\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}} - \frac{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}}{2z^{\frac{3}{2}}}\delta z,$$

und

$$\delta L = \frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x} + naz^{n-1}\delta z\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}} + \frac{az^n \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}};$$

mithin

$$\delta V = \int \left\{ \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{z}\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}} - \frac{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}}{2z^{\frac{3}{2}}}\delta z \right\} \mathrm{d}x$$

$$+\int\left\{\lambda\frac{d\delta z}{dx}+\lambda n\alpha z^{n-1}\delta z\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+\frac{\lambda\alpha z^n\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}\right\}dx,$$

die Integrale von $x=a$ bis $x=b$ genommen; oder, indem man diesen Ausdruck nach der bekannten Methode transformirt,

$$\delta V=-\int\delta y\left\{d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{z}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}+\alpha\, d.\frac{\lambda z^n\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}\right\}$$

$$-\int\delta z\left\{\frac{d\lambda}{dx}-n\alpha\lambda z^{n-1}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}+\frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{2z^{\frac{3}{2}}}\right\}dx$$

$$+\left\{\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{z}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}+\frac{\alpha\lambda z^n\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}\right\}\delta y+\lambda\delta z,$$

von $x=a$ bis $x=b$ genommen.

Als allgemeine Gleichungen des Maximums oder Minimums hat man daher

$$d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{z}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}+\alpha\, d.\frac{\lambda z^n\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}=0,$$

$$-\frac{d\lambda}{dx}+n\alpha\lambda z^{n-1}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}-\frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{2z^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt, indem man sie integrirt,

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{z}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}+\frac{\alpha\lambda z^n\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}=C;$$

folglich

$$\lambda=-\frac{1}{\alpha z^{n+\frac{1}{2}}}+\frac{C\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\alpha z^n\frac{dy}{dx}}$$

und

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{(n+\frac{1}{2})}{\alpha z^{n+\frac{3}{2}}}\frac{dz}{dx}-\frac{C\frac{dy^2}{dx^2}}{\alpha z^n\cdot\frac{dy^2}{dx^2}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}-\frac{nC\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\alpha z^{n+1}\frac{dy}{dx}}$$

Substituirt man diese Werthe für λ und $\frac{d\lambda}{dx}$ in der zweiten der obigen Differenzial-Gleichungen; so kommt

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{(n+\frac{1}{2})}{\alpha z^{n+\frac{3}{2}}}\frac{dz}{dx}+\frac{C\frac{dy^2}{dx^2}}{\alpha z^n\frac{dy^2}{dx^2}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}+\frac{nC\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{\alpha z^{n+1}\frac{dy}{dx}}\frac{dy}{dx}\\ -\frac{n\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{z^{\frac{3}{2}}}+\frac{nC\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{z\frac{dy}{dx}}-\frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{2z^{\frac{3}{2}}}\end{array}\right\}=0.$$

Da aber

$$\frac{dz}{dx}=g-\alpha z^n\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

ist, so ist

$$-\frac{(n+\frac{1}{2})}{az^{n+\frac{1}{2}}}\frac{dz}{dx} = -\frac{(n+\frac{1}{2})g}{az^{n+\frac{3}{2}}} + \frac{(n+\frac{1}{2})}{z^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},$$

$$\frac{nC\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{az^{n+1}\frac{dy}{dx}}\frac{dz}{dx} = \frac{nCg\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{az^{n+1}\frac{dy}{dx}} - \frac{nC\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{z\frac{dy}{dx}}.$$

Substituirt man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, so erlangt man die einfachere

$$-\frac{(n+\frac{1}{2})g}{z^{\frac{3}{2}}} + \frac{C\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{dy^2}{dx^2}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} + \frac{nCg\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{z\frac{dy}{dx}} = 0, \quad (A.)$$

aus welcher ferner, vermittelst der gegebenen Gleichung

$$\frac{dz}{dx} - g + az^n\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} = 0,$$

z eliminirt und eine Differenzial-Gleichung zwischen y und x abgeleitet werden kann. Inzwischen würde dieser Gang, welcher allerdings der kunstloseste ist, zu sehr verwickelten Resultaten führen. Nimmt man hingegen die Gleichungen

$$-\frac{d\lambda}{dx} + na\lambda z^{n-1}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{2z^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

$$\lambda = -\frac{1}{az^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{C\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{az^n\frac{dy}{dx}};$$

eliminirt λ zwischen beiden, wodurch hervorgeht

$$-\frac{d\lambda}{dx}-\frac{(n+\frac{1}{2})\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{z^{\frac{3}{2}}}+\frac{nC\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{z\frac{dy}{dx}}=0,$$

und verbindet diese mit der Gleichung (A); so erhält man

$$-\frac{d\lambda}{dx}=\frac{C\frac{dy^2}{dx^2}}{g\frac{dy^2}{dx^2}};$$

folglich, indem man integrirt,

$$-\lambda=\frac{C}{g\frac{dy}{dx}}+D$$

und, indem man λ vermittelst der obigen Gleichung eliminirt,

$$\frac{aC}{g\frac{dy}{dx}}+aD=\frac{1}{z^{n+\frac{1}{2}}}-\frac{C\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}{z^n\frac{dy}{dx}}$$

Eliminirt man nun zwischen dieser und der Gleichung (A) die Grösse z, so tritt eine Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung hervor, in welcher die Veränderlichen getrennt sind.

§. 65.

Bis hiezu beschäftigten wir uns bloss mit der Bestimmung solcher Funktionen für die relativ-unabhängigen Grössen, welche unter *allen möglichen*, höchstens durch Bedingungen *mit Beziehung auf die Grenzwerthe* der absolut-unabhängigen Grössen *näher characterisirten, Relationen* einen vorgegebenen Integral-Ausdruck zu einem Grössten oder Kleinsten machen. Man pflegt solche Maxima und Minima *ab-*

solute zu nennen, und ihnen die sogenannten *relativen* oder *bedingten* Grössten und Kleinsten entgegen zu stellen, bei denen unter *allen Relationen* für die relativ-unabhängigen Grössen, welche *für eine oder mehrere gegebenen Integral-Formeln dieselben Werthe geben*, nach solchen gefragt wird, vermöge deren ein andrer, ebenfalls gegebener, unbestimmter Integral-Ausdruck, *innerhalb derselben Grenzen genommen*, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Was die Lösung dieser Aufgabe anbelangt, so ist die Zurückführung derselben auf die vorigen Betrachtungen mit gar keinen Schwierigkeiten verbunden.

Es sei $V = \int W \mathrm{d}x$ die Formel, welche, das Integral von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, ein Maximum oder ein Minimum seyn soll, und

$$V^{(1)} = \int W^{(1)} \mathrm{d}x,\ V^{(2)} = \int W^{(2)} \mathrm{d}x,\ V^{(3)} = \int W^{(3)} \mathrm{d}x \ldots V^{(\mu)} = \int W^{(\mu)} \mathrm{d}x$$

seien diejenigen, welche, innerhalb derselben Grenzen genommen, den gegebenen Werthen $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)} \ldots N^{(\mu)}$ gleich seyn sollen. Alsdann ist es klar, dass diejenigen Relationen, welche, unter allen möglichen, den Ausdruck

$$V + \omega^{(1)} V^{(1)} + \omega^{(2)} V^{2} + \omega^{(3)} V^{(3)} + \ldots \omega^{(\mu)} V^{(\mu)},$$

wo unter $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)} \ldots \omega^{(\mu)}$ beliebige constante Zahlen gedacht werden, zu einem Maximum oder Minimum machen, zugleich so beschaffen seyn werden, dass sie unter denjenigen Relationen, welche für $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, $V^{(3)} \ldots V^{(\mu)}$ dieselben Werthe liefern, für die Formel V ein Maximum oder ein Minimum abgeben. Denn man denke sich das System von Relationen, den in Rede stehenden Ausdruck zu einem Maximum oder Minimum machend, als wirklich gefunden, und in diesem Ausdrucke selbst substituirt; so wird derselbe, wofern man

die für V, $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, $V^{(3)} \ldots V^{(\mu)}$ entstehenden Werthe mit $V_{(1)}$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)} \ldots P^{(\mu)}$ bezeichnet, den Werth

$$V_{(1)} + \omega^{(1)} P^{(1)} + \omega^{(2)} P^{(2)} + \omega^{(3)} P^{(3)} + \ldots \omega^{(\mu)} P^{(\mu)}$$

annehmen, welcher also, der Voraussetzung nach, ein Maximum oder Minimum ist. Ferner denke man sich ein anderes System von Relationen, so beschaffen, dass sie für $V^{(1)}$, $V^{(2)}$, $V^{(3)} \ldots V^{(\mu)}$ ebendie Werthe $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)} \ldots P^{(\mu)}$ liefern, und in demselben Ausdruck substituirt, wodurch dieser, den Werth von V mit $V_{(2)}$ bezeichnend, den Werth

$$V_{(2)} + \omega^{(1)} P^{(1)} + \omega^{(2)} P^{(2)} + \omega^{(3)} P^{(3)} + \ldots \omega^{(\mu)} P^{(\mu)}$$

erlangen wird. Alsdann hat man offenbar

$$V_{(1)} + \omega^{(1)} P^{(1)} + \omega^{(2)} P^{(2)} + \omega^{(3)} P^{(3)} + \ldots \omega^{(\mu)} P^{(\mu)}$$

grösser oder kleiner als

$$V_{(2)} + \omega^{(1)} P^{(1)} + \omega^{(2)} P^{(2)} + \omega^{(3)} P^{(3)} + \ldots \omega^{(\mu)} P^{(\mu)},$$

je nachdem ein Maximum oder ein Minimum statt findet; mithin

$$V_{(1)} > \text{oder} < V_{(2)}.$$

Hieraus geht also hervor, dass die Bestimmung eines relativen Maximums oder Minimums von $\int W dx$ auf die Bestimmung eines absoluten von der Formel

$$\int W dx + \omega^{(1)} \int W^{(1)} dx + \omega^{(2)} \int W^{(2)} dx + \omega^{(3)} \int W^{(3)} dx + \ldots \omega^{(\mu)} \int W^{(\mu)} dx,$$

die Integrale innerhalb derselben Grenzen genommen, zurückkommt.

Nimmt man daher von dieser Grösse die Variation der ersten Ordnung, transformirt diese, und setzt sie gleich Null; so werden die hervortretenden Gleichungen, sowohl die allgemeine, als die für die Grenzen, die als beliebig eingeführten constanten Grössen $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)} \ldots \omega^{(\mu)}$ enthalten, die aber, sammt den durch die Integration er-

zeugten Constanten, aus den Grenzgleichungen, in Verein mit den gegebenen

$$\int W^{(1)}\mathrm{d}x = N^{(1)},\ \int W^{(2)}\mathrm{d}x = N^{(2)},\ \int W^{(3)}\mathrm{d}x = N^{(3)} \ldots \int W^{(\mu)}\mathrm{d}x = N^{(\mu)}$$

deren Zahl der Anzahl der Grössen $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$, $\omega^{(3)}$, $\omega^{(\mu)}$ offenbar gleich ist, ihre Bestimmung erhalten.

§. 65.

Um diesen Gegenstand durch ein Beispiel zu erläutern, sei

$$V = \int yy\,\mathrm{d}x,\ V^{(1)} = \int y\,\mathrm{d}x = N^{(1)},\ V^{(2)} = \int \mathrm{d}x \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}} = N^{(2)},$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt.

Der Ausdruck, der zu einem absoluten Maximum oder Minimum gemacht werden muss, ist alsdann

$$\int yy\,\mathrm{d}x + \omega^{(1)} \int y\,\mathrm{d}x + \omega^{(2)} \int \mathrm{d}x \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}},$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ genommen, von welchem die Variation gleich

$$\int 2y\delta y\,\mathrm{d}x + \omega^{(1)} \int \delta y\,\mathrm{d}x + \omega^{(2)} \int \mathrm{d}x \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}},$$

oder, indem man diese Grösse nach der bekannten Methode transformirt, gleich

$$\int \delta y \left\{ (2y + \omega^{(1)})\,\mathrm{d}x - \omega^{(1)}\,\mathrm{d}.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}} \right\}$$

$$+ \frac{\omega'^{(2)} \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} \delta y,$$

von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, ist; und aus welcher letztern Form die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$(y + \omega^{(1)})\, dx - \omega^{(2)}\, d. \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} = 0,$$

oder

$$\frac{\omega'^{(2)} \frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = (2y + \omega^{(1)})\, dx$$

entspringt. Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{dy}{dx}$ und integrirt dieselbe, so erlangt man

$$\frac{-\omega'^{(2)}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = y^2 + \omega'^{(1)} + \alpha,$$

wo α eine beliebige Constante bezeichnet. Löst man diese Gleichung in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ auf, so kommt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\{\omega^{(2)} - (y^2 + \omega^{(1)} y + \alpha)^2\}}}{y^2 + \omega^{(1)} y + \alpha}$$

mithin

$$dx = \frac{y^2 + \omega'^{(1)} y + \alpha}{\sqrt{\{\omega^{(2)} - (y^2 + \omega^{(2)} y + \alpha)^2\}}}\, dy,$$

welches die Gleichung der elastischen Linie ist, und wovon das Integral noch eine neue Constante β enthalten wird, welche nebst den übrigen α, $\omega^{(1)}$, $\omega^{(2)}$ durch die Grenzgleichung

$$\frac{\omega^{(2)}\,\frac{dy_{(2)}}{db}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy_{(2)}}{db}\right)}}\,\delta y_{(2)} - \frac{\omega^{(2)}\,\frac{dy_{(1)}}{da}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy_{(2)}}{da}\right)}}\,\delta y_{(1)} = 0,$$

in Verbindung mit den gegebenen

$$\int y\,dx = N^{(1)}, \int dx\,\sqrt{1+\frac{dy_{(1)}}{db}} = N^{(2)},$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, ihre Bestimmung erlangen.

§. 67.

Die bisherigen Untersuchungen betrafen lediglich solche unbestimmten Integral-Ausdrücke, in denen nur Eine Grösse als absolut-unabhängig zu Grunde lag. Die Integral Formeln, in denen mehrere dieser Grössen vorhanden sind, sind ähnlicher Betrachtungen fähig; nur ist die Theorie der Integration von Differenzial-Gleichungen zwischen mehreren veränderlichen Grössen noch zu unvollständig, als dass sich diese auf eine befriedigende Weise durchführen liessen. Die besondere Betrachtung dieser Formeln, welche zwei absolut-unabhängige Grössen enthalten, wird bereits hinreichen, sowohl um dieses zu bekunden, als auch um den Weg noch etwas genauer zu bezeichnen, den man, bei Untersuchungen dieser Art, ganz allgemein wird verfolgen können. Der einfachste Fall dieser Formen ist offenbar derjenige, wo zugleich nur Eine relativ-unabhängige Grösse vorhanden, mithin, indem wir den unbestimmten Integral-Ausdruck durch

$$V = \iint W \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

repräsentiren,

$$W = F\left\{x, y, z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}y^2}, \ldots\right\}$$

ist.

Um nun für z eine solche Funktion von x und y zu finden, vermöge welcher V, die Integrale von $x = a$ bis $x = a'$, und von $y = b$ bis $y = b'$ genommen, ein Maximum oder ein Minimum werde, wollen wir annehmen, dass z selbst die gesuchte Funktion sei. Substituiren wir nun im obigen Ausdruck $z + k\delta z$ an die Stelle von z, und entwickeln den resultirenden nach Potenzen von k, so kommt

$$V + k\delta V + \frac{k^2}{1.2}\delta^2 V + \frac{k^3}{1.2.3}\delta^3 V + \frac{k^4}{1.2.3.4}\delta^4 V + \ldots,$$

aus welchem sich auf eine, der vorigen ganz ähnliche Weise ergiebt

$$\delta V = o,$$

sowohl für das Maximum, als das Minimum, und

$\delta^2 V < o$ für das Maximum, und $> o$ für das Minimum, unabhängig von δz.

Nach §. 28 hat man daher, indem man die daselbst angewandte abgekürzte Bezeichnung, jedoch mit Weglassung der Klammern für die parziellen Differenzial-Coefficienten beibehält,

$$\iint \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \delta z \; F(x, y)$$

$$+ \int \mathrm{d}y \; \delta z^{(a')} f^{(y)}(a', y) + \int \mathrm{d}x \, \delta z_{(b')} f^{(x)}(x, b')$$

$$+ \int \mathrm{d}y \; \frac{\mathrm{d}\delta z^{(a')}}{\mathrm{d}a'} f^{(y)}_{(1)}(a', y) + \int \mathrm{d}x \; \frac{\mathrm{d}\delta z_{(b')}}{\mathrm{d}b'} f^{(x)}_{(1)}(x, b')$$

$$+ \int \mathrm{d}y \; \frac{\mathrm{d}^2 \delta z^{(a')}}{\mathrm{d}a'^2} f^{(y)}_{(2)}(a', y) + \int \mathrm{d}x \; \frac{\mathrm{d}^2 \delta z_{(b')}}{\mathrm{d}b'^2} f^{(y)}_{(2)}(x, b')$$

u. s. w.

$$-\int dy\, \delta z^{(a)} f^{(y)}(a, y) - \int dx\, \delta z_{(b)} f^{(x)}(x, b)$$

$$-\int dy\, \frac{d\delta z^{(a)}}{da} f^{(y)}_{(1)}(a, y) - \int dx\, \frac{d\delta z_{(b)}}{db} f^{(x)}_{(1)}(x, b)$$

$$-\int dy\, \frac{d^2\delta z^{(a)}}{da^2} f^{(y)}_{(2)}(a, y) - \int dx\, \frac{d^2\delta z_{(b)}}{db^2} f^{(x)}_{(2)}(x, b)$$

u. s. w.

$$+ \Omega^{(a')}_{(b')} - \Omega^{(a)}_{(b')} - \Omega^{(a')}_{(b)} + \Omega^{(a)}_{(b)}$$

$$= o,$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = a'$, und von $y = b$ bis $y = b'$ genommen, welche Gleichung unabhängig von jeder besondern Form für δz, so fern nur die etwaigen Grenzbedingungen erfüllt werden, statt findet. Wie aber auch diese Bedingungen beschaffen seyn mögen, so sieht man doch leicht, dass, wenn wir δz als denselben entsprechend betrachten, alsdann auch die Form

$$\delta z + \Psi(x, y) \{(x-a)(x-a')(y-b'(y-b')\}^t,$$

wo $\Psi(x, y)$ eine ganz beliebige, jedoch $(x-a)$, $(x-a')$, $(y-b)$,$(y-b')$ nicht als Divisoren enthaltende Funktion von x und y bezeichnet, ihnen Genüge leisten wird; nachdem t so gross gedacht werden kann, dass die Variationen $\delta z^{(a)}$, $\frac{d\delta z^{(a)}}{da}$, $\frac{d^2\delta z^{(a)}}{da^2}$ . . . ; $\delta z^{(a')}$, $\frac{d\delta z^{(a')}}{da'}$, $\frac{d^2\delta z^{(a')}}{da'^2}$ . . . ; $\delta z_{(b)}$, $\frac{d\delta z_{(b)}}{db}$, $\frac{d^2\delta z_{(b)}}{db^2}$ . . . ; $\delta z_{(b')}$, $\frac{d\delta z_{(b')}}{db'}$, $\frac{d^2\delta z_{(b')}}{db'^2}$, . . . von dem zweiten Theile dieses Ausdrucks sämmtlich unabhängig werden. Substituirt man daher diese Form anstatt δz in der vorigen Gleichung, so erhält man, indem man diese selbst mit der Resultante verbindet,

$$\iint dx\, dy\, F(x, y)\, \Psi(x, y) \{(x-a)(x-a')(y-b)(y-b')\}^t = o,$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = a'$, und von $x = b$ bis $x = b'$ erstreckt, unabhängig von $\Psi(x, y)$. Auf eine, der obigen ganz ähnliche Weise ergiebt sich hieraus die identische Gleichung

$$F(x, y) = o.$$

Wie daher auch die Bedingungen für die Grenzen beschaffen seyn mögen; so zerfällt die Gleichung $\delta V = o$, unter allen Umständen, erstlich in die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$F(x, y) = o, \ (I.)$$

und zweitens in die Grenzgleichung

$$+\int dy\, \delta z^{(a')} f^{(y)}(a' y) + \int dx \delta z_{(b')} f^{(x)}(x, b')$$

$$+\int dy\, \frac{d\delta z^{(a')}}{da'} f^{(y)}_{(1)}(a', y) + \int dx\, \frac{d\delta z_{(b')}}{db'} f^{(x)}_{(1)}(x, b')$$

$$+\int dy\, \frac{d^2\delta z^{(a')}}{da'^2} f^{(y)}_{(2)}(a', y) + \int dx\, \frac{d^2\delta z_{(b')}}{db'^2} f^{(x)}_{(2)}(x, b')$$

u. s. w.

$$-\int dy\, dz^{(a)} f^{(y)}(a, y) - \int dx \delta z_{(b)} f^{(x)}(x, b)$$

$$-\int dy\, \frac{d\delta z^{(a)}}{da} f^{(y)}_{(1)}(a, y) - \int dx\, \frac{d\delta z_{(b)}}{db} f^{(x)}_{(1)}(x, b)$$

$$-\int dy\, \frac{d^2\delta z^{(a)}}{da^2} f^{(y)}_{(2)}(a, y) - \int dx\, \frac{d^2\delta z_{(b)}}{db^2} f^{(x)}_{(2)}(x, b)$$

u. s. w.

$$+\Omega^{(a')}_{(b')} - \Omega^{(a)}_{(b')} - \Omega^{(a')}_{(b)} + \Omega^{(a)}_{(b)}$$

$$= o \ (II.)$$

die Intregale von $x = a$ bis $x = a'$, nnd von $x = b$ bis $x = b'$ erstreckt. Dem Vorhergehenden nach ist es einleuchtend, dass letz-

tere Gleichung, so fern keine weiteren Bedingungen für die Grenzen vorhanden sind, nicht statt finden kann, wenn nicht die Coefficienten der verschiedenen Variationen, sowohl des mit dem Integrations-Zeichen behafteten, als des von diesem befreiten Theiles, einzeln gleich Null sind. Das Integral der Gleichung (I) also wird die für z geforderte Relation liefern, dessen beliebige Funktionen man alsdann dergestalt wird zu bestimmen haben, dass der Gleichung (II) ebenfalls Genüge geschehe. Dass inzwischen die Möglichkeit hievon an die Form des vorgegebenen Integral-Ausdrucks gebunden, mithin die Existenz eines Maximums oder Minimums von den Bedingungen für die Grenzen abhängig bleibt, leuchtet klar genug ein, so bald man sich nur dessen erinnert, was §. 45. mit Bezug auf die Formeln Einer absolut-unabhängigen Grösse bemerkt worden ist.

§. 68.

Der einfachste Fall dieser Art ist offenbar derjenige, wo die Grenzen bestimmt und gegeben sind, nachdem alsdann die Grenzgleichung von selbst statt findet. Die folgende Aufgabe ist hieher zu rechnen: Eine solche Oberfläche zu finden, deren Areal-Grösse, zwischen gegebenen Grenzen genommen, ein Minimum sei.

Bezeichnet man die Areal-Grösse einer Fläche ganz allgemein mit V; so hat man bekanntlich

$$V = \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2},$$

mithin

$$\delta V = \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, \frac{\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}x}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\delta z}{\mathrm{d}y}\right)}{\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2\right\}}}.$$

Da nun, $\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = N$ setzend,

$$\iint dx\, dy \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{d\delta z}{dx}\right)}{N} = \int dy \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)\delta z}{N} - \iint dx dy \delta z \left(\frac{d. \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{N}}{dx}\right)$$

$$\iint dx\, dy \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d\delta z}{dy}\right)}{N.} = \int dx \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)\delta z}{N} - \iint dx dy \delta z \left(\frac{d. \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)}{N}}{dy}\right)$$

ist; so hat man

$$\delta V = -\iint dx dy \delta z \left\{ \left(\frac{d. \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}}{dx}\right) + \left(\frac{d. \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}}{dy}\right) \right\}$$

$$+ \int dy\; \delta z \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}} + \int dx\; \delta z \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}}}.$$

Die allgemeine Gleichung des Minimums ist demnach

$$\left(\frac{d. \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}}{dx}\right) + \left(\frac{d. \frac{\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}}{dy}\right) = o,$$

oder, indem man differenziirt,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}-\dfrac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)}{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\\ +\dfrac{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}-\dfrac{\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)}{\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\end{array}\right\}=0,$$

welche sich auf

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left\{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}-2\left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}=0$$

reducirt durch deren Integration die gesuchte Relation für z erhalten werden muss.

VIERTES KAPITEL.

Einige Beispiele,
die Bestimmung des Maximums und Minimums unbestimmter Integral-Formeln betreffend.

§. 69.

Eine Gleichung zwischen x und y zu finden, vermöge welcher $\int y\,(ax-yy)\,dx$, das Integral zwischen gegebenen Grenzen genommen, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Da $V=\int y\,(ax-yy)\,dx$ ist, und die Grenzen des Integrals als constant angesehen werden; so ist

$$\delta V=\int \delta y\,(ax-3yy)\,dx,$$

und daher die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$ax-3y^2=o;\ \text{folglich}\ y=\sqrt{\frac{ax}{3}}.$$

Ferner ist $\delta^2 V=-\int 6y\,\delta y^2\,dx$, oder, indem man für y den gefundenen Werth substituirt,

$$\delta^2 V=-\int dx\delta y^2\sqrt{12ax}.$$

wovon der Differenzial-Coefficient positiv oder negativ ausfällt, je nachdem die negative oder die positive Wurzel genommen wird. Der gegebene Ausdruck ist daher sowohl eines Maximums, als Minimums fähig: ersteres findet statt für $y = + \sqrt{\frac{ax}{3}}$, letzteres aber für $y = - \sqrt{\frac{ax}{3}}$, und zwar entweder von $x = -\infty$ bis $x = o$, oder von $x = o$ bis $x = \infty$, je nachdem a negativ oder positiv ist.

§. 70.

Eine Gleichung zwischen x und y zu finden, nach welcher $\int (15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)\,dx$, das Integral zwischen gegebenen Grenzen genommen, ein Maximum oder ein Minimnm werde.

Da

$$V = \int (15a^2x^2y - 15a^3xy + 5a^2y^3 - 3y^5)\,dx$$

ist, so ist

$$\delta V = \int \delta y\,(15a^2x^2 - 15a^3x + 15a^2y^2 - 15y^4)\,dx;$$

und daher die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$15a^2x^2 - 15a^3x + 15a^2y^2 - 15y^4 = o,$$

mithin

$$y^2 = ax, \text{ oder } a(a-x)$$

und

$$y = \pm \sqrt{ax}, \text{ oder } \pm \sqrt{a(a-x)}.$$

Ferner ist $\delta^2 V = \int \delta y^2.\, 30y(a^2 - 2y^2)\,dx$, welche Funktion für die beiden ersten Wurzeln übergeht in

$$\int \pm 30\sqrt{ax}.\,(a^2 - 2ax)\,\delta y^2\,dx.$$

Da nun, a als positiv betrachtend, $(a^2 - 2ax)$ beständig positiv ist von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}a$, und beständig negativ von $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = \infty$; so wird man von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}a$ für die positive Wurzel ein Mi-

nimum, und für die negative Wurzel ein Maximum, von $x=\frac{1}{2}a$ bis $x=\infty$ hingegen für die positive Wurzel ein Maximum, und für die negative Wurzel ein Minimum erhalten.

Für die beiden letzten Wurzeln von y geht $\delta^2\ V$ über in

$$\int \pm 30 \sqrt{a(a-x)}.(2ax-a^2)\,\delta y^2 dx$$

wovon der Differenzial-Coefficient von $x=-\infty$ bis $x=+\frac{1}{2}a$ negativ für die positive, und positiv für die negative Wurzel, von $x=\frac{1}{2}a$ bis $x=a$ hingegen positiv für die positive, und negative für die negative Wurzel ist. Für die positive Wurzel findet daher ein Maximum statt von $x=-\infty$ bis $x=\frac{1}{2}a$, und ein Minimum von $x=\frac{1}{2}a$ bis $x=a$. Für die negative Wurzel hat das Umgekehrte statt.

§. 71.

Eine Gleichung zwischen x und y zu finden, vermöge welcher $\int(3ax-3x^2-y^2)(ax-x^2-\frac{4}{3}xy+y^2)\,dx$, das Integral innerhalb gegebener Grenzen genommen, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Da $V=\int(3ax-3x^2-y^2)(ax-x^2-\frac{4}{3}xy+y^2)\,dx$ ist, und die Grenzen des Integrals bestimmt sind; so ist

$\delta V=-\int\delta y.\,2y(ax-x^2-\frac{4}{3}xy+y^2)\,dx+\int\delta y(2y-\frac{4}{3}x)(3ax-3x^2-y^2)\,dx,$

und daher die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$-2y(ax-x^2-\tfrac{4}{3}xy+y^2)+(2y-\tfrac{4}{3}x)(3ax-3x^2-y^2)=o,$$

oder, indem man die Producte entwickelt, und den Ausdruck reducirt,

$$y^3-xy^2+(x^2-ax)\,y+ax^2-x^3=o,$$

wovon die drei Wurzeln

$$y=x,\ y=\pm\sqrt{x(a-x)}$$

sind. Ferner hat man

$$\delta^2 V=\int\delta y^2\left\{-2(ax-x^2-\tfrac{4}{3}xy+y^2)+2y(\tfrac{4}{3}x-2y)+2(3ax-3x^2-y^2)-2y(2y-\tfrac{4}{3}x)\right\}dx$$

$$= \int 4 \delta y^2 . (ax - x^2 + 2xy - 3y^2) \, dx.$$

Substituirt man hierin für y den ersten der obigen Werthe, so kommt

$$\delta^2 V = \int \delta y^2 . \, 4x (a - 2x) \, dx,$$

wovon der Differenzial-Coefficent von $x = -\infty$ bis $x = o$ beständig negativ, von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}a$ beständig positiv, und von $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = \infty$ beständig negativ seyn wird. Der gegebene Ausdruck wird daher, so fern $y = x$ gesetzt wird, von $x = -\infty$ bis $x = o$ ein Maximum, von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}a$ ein Minimum, und von $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = \infty$ abermals ein Maximum werden.

Substituirt man für y die zweite Wurzel, so erlangt man

$$\delta^2 V = \int \delta y^2 . \, 4 \left\{ ax - x^2 + 2x \sqrt{x(a-x)} - 3x(a-x) \right\} dx$$

$$= \int 8 \delta y^2 \, x \sqrt{a-x} \left(\sqrt{x} - \sqrt{a-x} \right) dx,$$

wovon der Differenzial-Coefficient von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}a$ negativ, und von $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = a$ positiv ist. So fern man also $y = + \sqrt{x(a-x)}$ setzt, wird der gegebene Ausdruck ein Maximum von $x = o$ bis $x = \frac{1}{2}a$, und ein Minimum von $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = a$.

Substituirt man endlich für y die dritte der gefundenen Wurzeln, so kommt

$$\delta^2 V = \int \delta y^2 . \, 4 \left(ax - x^2 - 2x \sqrt{x(a-x)} - 3x(a-x) \right) dx$$

$$= \int 8 \delta y^2 \, x \sqrt{a-x} \left(- \sqrt{a-x} - \sqrt{x} \right) dx,$$

wovon der Differenzial-Coefficient von $x = o$ bis $x = a$ beständig negativ ist. In diesem Falle wird also der gegebene Ausdruck zu einem Maximum.

§. 72.

Eine Gleichung zwischen x und y zu finden, vermöge welcher $\int y^n \, dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, das Integral innerhalb gegebener Grenzen genommen, ein Maximum oder Minimum werde.

Da $V = \int y^n dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ ist, und die Grenzen des Integrals als constant angesehen werden; so ist

$$\delta V = \int dx.\, n y^{n-1} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot \delta y + \int dx. \frac{y^n \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} \frac{d\delta y}{dx}$$

$$= \int dx. \left(n y^{n-1} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{1}{dx} d. \frac{y^n \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} \right) \delta y + \frac{y^n \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} \delta y.$$

Die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums ist demnach

$$n y^{n-1} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{1}{dx} d. \frac{y^n \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = o,$$

oder

$$n + n \frac{dy^2}{dx^2} - y \frac{d^2 y}{dx^2} = o.$$

Um diese Gleichung zu integriren, wollen wir y anstatt x als unabhängig einführen, oder dy anstatt dx als constant betrachten.

Bekanntlich ist alsdann $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{dx} d. \frac{dy}{dx} = - \frac{d^2 x \, dy}{dx^3}$, und die Gleichung geht über in

$$n + n\frac{dy^2}{dx^2} + y\frac{d^2x}{dx^2}\frac{dy}{dx} = o,$$

oder

$$\frac{d^2x}{dy^2}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}} - \frac{\frac{dx}{dy}}{1+\frac{dx^2}{dy^2}}\right) + \frac{n}{y} = o;$$

daher, indem man integrirt,

$$log.\ \frac{dx}{dy} - \frac{1}{2}\ log.\ \left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right) + n\ log.\ y = log.\ a,$$

wo a eine beliebige Constante bezeichnet; oder

$$y^n\frac{dx}{dy} = a\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

mithin

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{\sqrt{y^{2n} - a^2}},$$

und endlich

$$x = \int\frac{a\,dy}{\sqrt{y^{2n} - a^2}},$$

Durch die Substitution des für $\frac{dy}{dx}$ gefundenen Werthes geht δV über in $\sqrt{y^{2n} - a^2}.\ \delta y$, welches die Grenzgleichung

$$\sqrt{y^{2n}_{(2)} - a^2}.\ \delta y_{(2)} - \sqrt{y_{(1)} - a^2}.\ \delta y_{(1)} = o$$

verschafft, der nicht genügt werden kann, so lange $\delta y_{(2)}$, $\delta y_{(1)}$ als beliebig betrachtet werden. So fern daher die Funktionen, unter welchen die eines Maximums oder Minimums gesucht wird, nicht näher bedingt werden, giebt es keine, vermöge welcher der gegebene Ausdruck ein Maximum oder Minimum werden sollte. Man vergleiche hiermit §. 45.

Ferner findet man

$$\delta^2 V = \int \mathrm{d}x \left\{ n.(n-1) y^{n-2} \sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}\, \delta y^2 + \frac{2ny^{n-1}}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}} \delta y \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + \frac{y^n}{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \right\},$$

so fern man das Integral innerhalb der gegebenen Grenzen erstreckt; woraus sogleich hervorgeht, dass ein Maximum oder ein Minimum statt findet, je nachdem y^n negativ oder positiv ist.

Setzt man $n = 1$, so erlangt man

$$\mathrm{d}x = \frac{\alpha \mathrm{d}y}{\sqrt{y^2 - \alpha^2}}, \text{ mithin } x = \alpha \log \frac{y + \sqrt{y^2 - \alpha^2}}{\alpha} + \alpha \log \beta, \text{ und } y = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 e^{\frac{2x}{\alpha}}}{2\gamma e^{\frac{x}{\alpha}}},$$

wofern man $\frac{\alpha}{\beta} = \gamma$ setzt.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, dass uns $y_{(1)}$ und $y_{(2)}$ gegeben seien, d. h. dass unter solchen Funktionen die des Maximums oder Minimums gesucht werde, welche für $x = a$ und $x = b$ die Werthe $y_{(1)}$ und $y_{(2)}$ geben; so sind dadurch $\delta y_{(1)}$ und $\delta y_{(2)}$ gleich Null, und die beiden Constanten α und β als bestimmt zu betrachten. Die Variation der zweiten Ordnung wird alsdann

$$\delta^2 V = \int \mathrm{d}x \left\{ \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}} \delta y \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}} \delta^2 y + \int \mathrm{d}x \left\{ \frac{2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}}{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \delta y^2 + \frac{y}{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \right\},$$

welches, von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, übergeht in

$$\int \mathrm{d}x \left\{ \frac{2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}}{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \delta y^2 + \frac{y}{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \right\},$$

von $x = a$ bis $x = b$ genommen. Aus der Gleichung für y ſolgt, dass diese Grösse mit γ von demselben Zeichen ist. Sind daher $y_{(1)}$, $y_{(2)}$ positiv, so ist es auch $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, und daher, α ebenfalls als positiv betrachtend, auch y, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, mithin der obige Differenzial-Coeſſicient beständig positiv, ohne unendlich zu werden. Der obige Ausdruck wird alsdann ein Minimum, wie auch die Grenzen genommen werden.

§. 73.

Eine Gleichung zwischen x und y zu finden, vermöge welcher $\int \mathrm{d}x\,(xx + yy)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}$, das Integral zwischen gegebeneu Grenzen genommen, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Da in diesem Falle $V = \int (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}$ ist, und die Grenzen des Integrals als constant angesehen werden; so ist

$$\delta V = \int \mathrm{d}x . y (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}} . \delta y + \int \mathrm{d}x \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}} \frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}$$

$$= \int \delta y \left\{ y (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}} - \frac{1}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}. \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}} \right\} \mathrm{d}x + \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}} \delta y,$$

und daher die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}-\frac{1}{dx}\,d.\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}=0,$$

oder

$$y-x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2+y^2}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=\frac{\frac{d^2y}{dx}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

mithin, indem man integrirt,

$$arc.\,tg\,\frac{x}{y}=arc.\,tg.\frac{dy}{dx}+arc.\,tg.\,\alpha=arc.\,tg.\,\frac{\frac{dy}{dx}+\alpha}{1-\alpha\frac{dy}{dx}}$$

folglich

$$\frac{x}{y}=\frac{\frac{dy}{dx}+\alpha}{1-\alpha\frac{dy}{dx}},$$

oder

$$x-\alpha x\,\frac{dy}{dx}-\alpha y-y\,\frac{dy}{dx}=0,$$

und daher, indem man wiederum integrirt,

$$x^2-2\alpha\,xy-y^2=\beta,$$

endlich

$$y=-\alpha x+\sqrt{(\alpha^2+1)\,x^2-\beta}.$$

Substituirt man für $\frac{dy}{dx}$ den gefundenen Werth, so geht δV über in $\frac{x-\alpha y}{\sqrt{\alpha^2+1}}$, woraus die Grenzgleichung

$$\frac{b - ay_{(2)}}{\sqrt{a^2+1}}\,\delta y_{(2)} - \frac{a - ay_{(1)}}{\sqrt{a^2+1}}\,\delta y_{(1)} = 0$$

entspringt, der nicht genügt werden kann, so lange $\delta y_{(1)}$, $\delta y_{(2)}$ beliebig bleiben. Denn in diesem Falle hat man

$$b - ay_{(2)} = 0, \quad a - ay_{(1)} = 0$$

folglich

$$\frac{b}{a} = \frac{y_{(2)}}{y_{(1)}} = \frac{-ab + \sqrt{(a^2+1)b^2 - \beta}}{-aa + \sqrt{(a^2+1)a^2 - \beta}},$$

woraus $b^2\beta, = a^2\beta$ hervorgeht, welches ungereimt ist. Man vergleiche hiermit §. 45.

Ferner wird gefunden

$$\delta^2 V = \int dx \left\{ \begin{array}{l} [1 - y(x^2+y^2)^{-1}](x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}.\delta y^2 \\ +(1+y)\dfrac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}}.\delta y\dfrac{d\delta y}{dx} + \dfrac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\dfrac{d\delta y}{dx}\right)^2 \end{array} \right\},$$

woraus sogleich hervorgeht, dass der vorgegebene Ausdruck nur eines Minimums fähig ist. Setzt man daher

$$[1 - y(x^2+y^2)^{-1}](x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = A,$$

$$(1+y)\frac{(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}} = B, \quad \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = C, \text{ und}$$

$$\delta^2 V = \mu\delta y^2 + \int dx \left\{M\delta y^2 + N\delta y\frac{d\delta y}{dx} + P\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2\right\}:$$

so hat man

$$A - \frac{d\mu}{dx} = M, \; B - \mu = N, \; P = C.$$

Bestimmt man nun μ dergestalt, dass man habe

$$N - \frac{M^2}{4P^2} = o,$$

so findet ein Minimum für alle Werthe von x statt, für welche M und N nicht unendlich werden (§. 46).

§. 74.

Eine Gleichung zwischen x und y zu finden, vermöge welcher $\int \frac{y^n \frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} dx$, das Integral zwischen gegebenen Grenzen genommen, ein Maximum oder Minimum werde.

Da hier $V = \int \frac{y^n \frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} dx$ ist, und die Grenzen des Integrals als constant angesehen werden; so hat man

$$\delta V = \int \delta y \left\{ \frac{ny^{n-1}\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + \frac{1}{dx} d. \frac{y^n \frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy^2}{dx^2}} + \frac{1}{dx^2} d^2. \frac{y^n}{\frac{dy}{dx}} \right\} dx$$

$$+ \delta y \left\{ \frac{y^n \frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy^2}{dx^2}} - \frac{1}{dx} d. \frac{y^n}{\frac{dy}{dx}} \right\} + \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{y^n}{\frac{dy}{dx}},$$

und als allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$\frac{ny^{n-1}\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + n(n-1)y^{n-2}\frac{dy}{dx} = o;$$

folglich, indem man integrirt,

$$y^n \frac{dy}{dx} = \alpha, \text{ und } y^n = \alpha x + \beta.$$

Durch Substitution dieses Werthes geht δV über in

$$\delta y \left\{ 2(1-n)(\alpha x+\beta)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{n^2}{\alpha}(\alpha x+\beta)^{2-\frac{2}{n}} \right\} + \frac{d\delta y}{dx} \cdot \frac{n}{\alpha}(\alpha x+\beta)^{1-\frac{1}{n}},$$

welches, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, als Gleichung für die Grenzen

$$\left.\begin{aligned} &\delta y_{(2)} \left\{ 2(1-n)(\alpha b+\beta)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{n^2}{\alpha}(\alpha b+\beta)^{2-\frac{2}{n}} \right\} + \frac{d\delta y_{(2)}}{db} \cdot \frac{n}{\alpha}(\alpha b+\beta)^{2-\frac{1}{n}} \\ -&\delta y_{(1)} \left\{ 2(1-n)(\alpha a+\beta)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{n^2}{\alpha}(\alpha a+\beta)^{2-\frac{2}{n}} \right\} - \frac{d\delta y_{(1)}}{db} \cdot \frac{n}{\alpha}(\alpha a+\beta)^{2-\frac{1}{n}} \end{aligned}\right\} = o$$

verschafft. Werden daher die Relationen, unter welchen die des Maximums oder Minimums verlangt wird, durch keine Bedingung mit Bezug auf die Grenzen näher characterisirt, so sind $\delta y_{(2)}, \frac{d\delta y_{(2)}}{db}, \ldots$ $\delta y_{(1)}, \frac{d\delta y_{(1)}}{da}$ vollkommen beliebig und unabhängig von einander, und die vorige Gleichung zerfällt in die vier folgenden:

$$2(1-n)(\alpha b+\beta)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{n^2}{\alpha}(\alpha b+\beta)^{2-\frac{2}{n}} = o, \quad \frac{n}{\alpha}(\alpha b+\beta)^{2-\frac{1}{n}} = o,$$

$$2(1-n)(\alpha a+\beta)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{n^2}{\alpha}(\alpha a+\beta)^{2-\frac{2}{n}} = o, \quad \frac{n}{\alpha}(\alpha a+\beta)^{2-\frac{1}{n}} = o,$$

während nur zwei Constanten zu bestimmen sind; man siehe hierüber §. 45. Inzwischen ist diesen für den Fall, wo $n > 1$ ist, durch $\alpha = o$, $\beta = o$ zu genügen, wodurch $y = o$, und auch, wie man leicht ermittelt, $\delta^2 V = o$ entsteht. Man überzeugt sich aber leicht, dass unter diesen Umständen weder ein Maximnm noch ein Minimum vorhanden ist, nachdem durch die Substitution von $y + k\delta y$ anstatt y der vorge-

gebene Ausdruck gleich $\int (y+k\delta y)^n \frac{\frac{d^2(y+k\delta y)}{dx^2}}{\frac{d(y+k\delta y)}{dy}}$ wird, welcher für $y=o$

in $k^n \int \delta y^n \frac{\frac{d^2\delta y}{dx^2}}{\frac{d\delta y}{dx}}$ übergeht, dessen Zeichen von denen der Variationen

abhängig ist.

Die Schwierigkeit wird aber gehoben, wenn man die Frage folgendermassen stellt: Unter allen Relationen zwischen x und y, welche, indem man $x = a$ und $x = b$ setzt, für y die Werthe $y_{(1)}$ und $y_{(2)}$, und für $\frac{dy}{dx}$ irgend welche, aber gleiche Werthe geben, eine solche zu finden, vermöge welcher $\int \frac{y^n \frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} dx$, das Integral von $x=a$ bis $x = b$ erstreckt, ein Maximum oder Minimum werde. Alsdann hat man nehmlich $\delta y_{(2)} = o$, $\frac{d\delta y_{(2)}}{db} = o$, $\delta y_{(1)} = o$, $\frac{d\delta y_{(1)}}{da} = o$, wodurch die Grenzgleichung wegfällt, und die Constanten α und β vermittelst der für x und y gegebenen Werthe bestimmt werden.

Ferner wird gefunden

$$\delta^2 V = \frac{2ny^{n-1}}{\frac{dy}{dx}} \delta y \frac{d\delta y}{dx} - \frac{ny^n}{\frac{dy^2}{dx^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

$$+\int dx \left\{ n.(n-1). \frac{y^{n-2}\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} \delta y^2 - \left(\frac{2ny^{n-1}\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy^2}{dx^2}} + \frac{1}{dx} d. \frac{2ny^{n-1}}{\frac{dy}{dx}} \right) \delta y \frac{d\delta y}{dx} \right.$$

$$+\left(\frac{2ny^{n}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}}{\frac{dy^{3}}{dx^{3}}}-\frac{2ny^{n-1}}{\frac{dy}{dx}}+\frac{1}{dx}\,d.\,\frac{2ny^{n}}{\frac{dy^{2}}{dx^{2}}}\right)\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^{2}\Bigg\}$$

von $x=a$ bis $x=b$, oder, indem man für y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Werthe aus der obigen Gleichung substituirt, und $\delta y_{(1)}=o$, $\frac{d\delta y_{(1)}}{da}=o,\ldots$ $\delta y_{(2)}=o$, $\frac{d\delta y_{(2)}}{db}=o$ setzt,

$$\delta^{2}V=(n-1)\int dx\left\{\begin{array}{c}-(n-1)\alpha(\alpha x+\beta)^{-\frac{2}{n}}\delta y^{2}-2n(\alpha x+\beta)^{\frac{n-2}{n}}\delta y\frac{d\delta y}{dx}\\+\frac{n^{2}(n-2)}{\alpha}(\alpha x+\beta)^{\frac{2n-2}{n}}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^{2}\end{array}\right\},$$

von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt; woraus man sieht, dass ein Maximum oder ein Minimum statt finden wird, je nachdem $n <$ oder $>$ 2 ist; und falls n ein Bruch von geradem Zähler seyn sollte, je nachdem eine andere Wurzel für y genommen wird. Für $n=1$ wird $\delta^{2}V=-\int\frac{dx}{\alpha}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^{2}$, und findet ein Maximum, oder ein Minimum statt, je nachdem α positiv oder negativ ist, welche Werthe von x auch für die Grenzen angenommen werden.

§. 75.

Eine Gleichung zwischen x und y zu finden, vermöge welcher $\int\left(\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right)^{n}dx$, von $x=a$ bis $x=b$ erstreckt, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Da $V=\int\left(\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right)^{n}dx$ ist, so ist $\delta V=\int n\left(\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right)^{n-1}\frac{d^{2}\delta y}{dx^{2}}dx$.

Verlangt man nun unter *allen* Relationen die besagte zu finden,

so hat man unmittelbar $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{n-1} = o$, folglich entweder $\frac{d^2 y}{dx^2} = o$, oder $\frac{1}{\frac{dy^2}{dx^2}} = o$, je nachdem $n >$ oder < 1 ist, und von welchen Gleichungen die erste $y = ax + \beta$ giebt.

Ferner hat man $\delta^2 V = \int n.(n-1) \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{n-2} \left(\frac{d^2 \delta y}{dx}\right)^2 dx$, welche Grösse durch die Substitution des für y gefundenen Werthes gleich Null wird. Der Grund hiervon ist, dass $\int \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + k \frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right)^n dx$, für $\frac{d^2 y}{dx^2} = o$, übergeht in $\int k^n \left(\frac{d^2 \delta y}{dx^2}\right)^n dx$, welches zeigt, dass kein Maximum, sondern ein Minimum vorhanden seyn wird, wenn n entweder eine gerade ganze Zahl, oder ein Bruch von geradem Zähler und ungeradem Nenner ist, jedoch nicht kleiner als 1.

Transformirt man aber den obigen Ausdruck nach der bekannten Methode, so kommt

$$\delta V = n \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{n-1} \frac{d\delta y}{dx} - \int n \frac{1}{dx} d.\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{n-1} \frac{d\delta y}{dx} dx$$

$$= n \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{n-1} \frac{d\delta y}{dx} - n \frac{1}{dx} d.\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{n-1} \delta y + \int n \frac{1}{dx^2} d^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{n-1} \delta y \, dx,$$

und daher als allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$n \frac{1}{dx^2} d^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{n-1} = o, \quad n \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{n-1} = \alpha x + \beta$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{\alpha}{n} x + \frac{\beta}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{n-1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{n} x + \frac{\beta}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \gamma$$

$$y = \frac{n(n-1)^2}{\alpha^2 (2n-1)} \left(\frac{\alpha}{n} x + \frac{\beta}{n}\right)^{\frac{2n-1}{n-1}} + \gamma x + \varepsilon.$$

Substituirt man diesen Werth, so ergiebt sich als Grenzgleichung

$$-\alpha \delta y_{(2)} + \alpha \delta y_{(1)} + (\alpha b + \beta) \frac{d\delta y_{(2)}}{db} - (\alpha a + \beta) \frac{d\delta y_{(1)}}{da} = o.$$

Fragt man nun unter allen möglichen Relationen zwischen x und y nach einer solchen, vermöge welcher der gegebene Ausdruck ein Maximum oder Minimum werde; so geht die Grenzgleichung in die vier folgende über:

$$\alpha = o, \ \alpha = o, \ \alpha b + \beta = o, \ \alpha a + \beta = o,$$

woraus $\alpha = o$, $\beta = o$, mithin $y = \gamma x + \varepsilon$ folgt, wo γ und ε völlig beliebige Constanten sind (§. 45.): dies ist der schon oben betrachtete Fall.

Fragt man aber unter denjenigen Relationen, welche, wenn man $x = a$ und $x = b$ setzt, für y gegebene Werthe liefern, nach derjenigen, für welche jener Ausdruck ein Maximum oder Minimum werde; so hat man $\delta y_{(2)} = o$, $\delta y_{(1)} = o$, und als Grenzgleichungen

$$\alpha b + \beta = o, \ \alpha a + \beta = o,$$

welche ebenfalls $\alpha = o$, $\beta = o$, mithin $y = \gamma x + \varepsilon$ geben, wo aber γ und ε durch die für x und y gegebenen Werthe bestimmt sind.

Ist inzwischen die Frage nach einer solchen Relation, welche, unter allen, die $x = a$ und $x = b$ gesetzt, für $\frac{dy}{dx}$ gegebene Werthe liefern, den besagten Ausdruck zu einem Maximum oder Minimum machen; so hat man $\frac{d\delta y_{(2)}}{db} = o$, $\frac{d\delta y_{(1)}}{da} = o$ und, um die Grenzgleichung zu erfüllen, $\alpha = o$, mithin $y = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} x^2 + \gamma x + \varepsilon$, wo aber β und γ durch die für x und $\frac{dy}{dx}$ gegebenen Werthe bestimmt sind, und ε beliebig bleibt, so lange nicht der Werth von y für einen bekannten Werth von x gegeben ist.

Fragt man endlich unter allen Relationen, welche, wenn man $x = a$ und $x = b$ setzt, für y die Werthe $y_{(1)}$ und $y_{(2)}$, und für $\frac{dy}{dx}$

die Werthe $\frac{dy_{(2)}}{da}$, und $\frac{dy_{(1)}}{da}$ liefern, nach der des Maximums oder Minimums, so hat man $\delta y_{(2)} = o$, $\delta y_{(1)} = o$, $\frac{d\delta y_{(2)}}{db} = o$, $\frac{d\delta y_{(1)}}{da} = o$, die Bedingung der Grenzgleichhng ist alsdann hiedurch erfüllt, und es ist ......

$y = \frac{n(n-1)^2}{a^2(2n-1)}\left(\frac{a}{n}x + \frac{\beta}{n}\right)^{\frac{2n-1}{n-1}} + \gamma x + \varepsilon$, wo die Constanten durch jene Gegebenen bestimmt werden.

Da $\delta^2 V = \int n(n-1)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{n-2}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 dx$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{a}{n}x + \frac{\beta}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ ist, so hat man $\delta^2 V = \int n(n-1)\left(\frac{a}{n}x + \frac{\beta}{n}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 dx$, woraus hervorgeht, dass das Maximum oder Minimum an den Werth von n gebunden ist.

Ist aber $n = 1$, so ist $\delta^2 V = o$, und in diesem Falle ist weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden. Um sich hievon näher zu überzeugen, braucht man nur zu überlegen, dass, unter dieser Voraussetzung, der vorgegebene Ausdruck übergeht in $\int \frac{d^2y}{dx^2}dx = \frac{dy}{dx} + C$. welches, von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, giebt: $V = \frac{dy_{(2)}}{db} - \frac{dy_{(1)}}{da}$, folglich, indem man $k\delta y$ anstatt y setzt, $V_{(1)} = V + \left(\frac{d\delta y_{(2)}}{db} - \frac{d\delta y_{(1)}}{da}\right)k$, wo das Zeichen des Increments stets an das von k gebunden bleibt, so lange $\frac{d\delta y_{(2)}}{db}$, $\frac{d\delta y_{(1)}}{da}$ unbestimmt bleiben. Setzt man diese gleich Null, so wird das Increment selbst gleich Null.

§. 76.

Eine Gleichung zwischen x und y zu finden, nach welcher . . .

$\int y\,dx \times \int x \frac{dy}{dx}\,dx$, die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Da $V = \int y\,dx . \int x \frac{dy}{dx}\,dx$ ist, so ist

$$\delta V = \int \delta y\,dx . \int x \frac{dy}{dx}\,dx + \int y\,dx . \int x \frac{d\delta y}{dx}\,dx$$

$$= \int \delta y\,dx . \int x \frac{dy}{dx}\,dx + \int y\,dx .\ x\delta y - \int y\,dx . \int \delta y\,dx$$

$$= \int \delta y\,dx . \left\{ \int x \frac{dy}{dx}\,dx - \int y\,dx \right\} + x\delta y . \int y\,dx;$$

und daher die allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$\int x \frac{dy}{dx}\,dx = \int y\,dx,\quad x \frac{dy}{dx}\,dx = y\,dx,\quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},\quad y = \alpha x.$$

Die Gleichung für die Grenzen wird $\delta y_{(2)} \frac{\alpha}{2} b^3 - \delta y_{(1)} \frac{\alpha}{2} a^3 = o$, und die Variation der zweiten Ordnung

$$\delta^2 V = \int \delta y\,dx . \int x \frac{d\delta y}{dx}\,dx + \int \delta y\,dx . \int x \frac{d\delta y}{dx}\,dx = 2 \int \delta y\,dx . \int x \frac{d\delta y}{dx}\,dx$$

$$= 2\delta y\ x . \int x \frac{d\delta y}{dx}\,dx - 2 \int x \frac{d\delta y}{dx}\,dx . \int x \frac{d\delta y}{dx}\,dx$$

$$= 2\delta y . x . \int \delta y\,dx - 2 \int \delta y\,dx . \int \delta y\,dx,$$

von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt. Fragt man nun unter allen Relationen, welche, wenn man $x = a$ und $x = b$ setzt, für y gegebene Werthe liefern, nach derjenigen, vermöge welcher der obige Ausdruck ein Maximum oder ein Minimum werde, so ist dadurch die Bedingung der Grenzgleichung erfüllt, und $\delta^2 V$ reducirt sich auf

$$-2 \left(\int x \frac{d\delta y}{dx}\,dx \right)^2 = -2 \left(\int \delta y\,dx \right)^2,$$

welches offenbar ein Maximum anzeigt.

§. 77.

Unter allen Relationen zwischen x und y, vermöge welcher $\int yx\,dx$, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, denselben Werth A erlangt, eine solche zu finden, nach welcher $\int yy\,dx$, innerhalb derselben Grenzen erstreckt, ein Maximum oder ein Minimum werde.

Nach §. 65 ist hier $V = \int yy\,dx + \omega \int yx\,dx$, also

$$\delta V = \int 2y\,\delta y\,dx + \omega \int x\delta y\,dx = \int dx\,(2y + \omega x)\,\delta y,$$

und daher die Gleichung des Maximums oder Minimums

$$2y + \omega x = o;\text{ endlich } y = -\frac{\omega}{2}x.$$

Zur Bestimmung von ω hat man die Bedingung $\int -\frac{\omega x^2}{2}\,dx$, von $x = a$ bis $x = b$, gleich A, woraus folgt $\omega = \frac{6A}{a^3 - b^3}$.

Endlich ist $\delta^2 V = \int 2\delta y^2\,dx$, woraus folgt, dass der vorgegebene Ausdruck ein Minimum wird.

§. 78.

Eine solche Curve zu finden, deren Bogen mit der Evolute und den beiden Krümmungshalbmessern, den Abcissen a und b entsprechend, den kleinsten Flächenraum einschliesse.

Bezeichnet man die Abcissen mit x, die Ordinaten mit y, die Krümmungshalbmesser mit ϱ, und den in Rede stehenden Flächenraum mit R; so hat man, bekannten Sätzen der analytischen Geometrie gemäss,

$$2\,dR = \varrho\,dx\,\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},\quad \varrho = \mp \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

folglich $$2R = \mp \int dx \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wo sich das obere Zeichen auf eine gegen die Abcissen-Axe concave, das untere hingegen auf eine gegen diese convexe Curve bezieht.

Setzt man daher $$\int dx \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = V,$$ so wird, damit R ein Kleinstes sei, V, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, ein Maximum seyn müssen, wenn die Curve concav, ein Minimum aber, wenn die Curve convex gegen die Axe ist. Da nun

$$\delta V = -\int \delta y.\, d.\left\{\frac{4\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + \frac{1}{dx} d. \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y^2}{dx^4}}\right\}$$

$$+ \delta y \left\{\frac{4\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + \frac{1}{dx} d. \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y^2}{dx^4}}\right\} - \frac{d\delta y.}{dx} \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y^2}{dx^4}}$$

ist; so hat man als allgemeine Gleichung des Maximums oder Minimums

$$d.\left\{\frac{4\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + \frac{1}{dx} d. \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y^2}{dx^4}}\right\} = 0;$$

folglich, indem man integrirt,

$$\frac{4\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + \frac{1}{dx} d. \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y^2}{dx^4}} = \alpha,$$

oder $$\frac{8\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} - \frac{2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{d^2y^2}{dx^4}} = \alpha\,\frac{d^2y}{dx^2};$$

mithin, indem man auf's neue integrirt,

$$\frac{2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \alpha\,\frac{dy}{dx} + \beta,$$

wo α und β zwei beliebige Constanten bezeichnen. Bringt man diese Gleichung unter die Form

$$1 = \frac{\alpha\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}}{2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2} + \frac{\beta\,\frac{d^2y}{dx^2}}{2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2},$$

oder

$$1 = \frac{\alpha\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}}{2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2} + \frac{\beta\,\frac{d^2y}{dx^2}\left(1-\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{4\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2} + \frac{\beta\,\frac{d^2y}{dx^2}}{4\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

und integrirt diese; so erlangt man

$$x = \gamma - \frac{\alpha - \beta\frac{dy}{dx}}{4\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} + \frac{\beta}{4}\ arc.\ tg\ \frac{dy}{dx}. \quad (I.)$$

Ferner ist, da $y = \int \frac{dy}{dx}\,dx = \varepsilon + x\,\frac{dy}{dx} - \int x\,\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$ ist,

$$y = \varepsilon + x\,\frac{dy}{dx} - \int dx\left\{\gamma\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{\left(\alpha-\beta\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2}}{4\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} + \frac{\beta}{4}\,\frac{d^2y}{dx^2}\ arc.\ tg.\ \frac{dy}{dx}.\right\}$$

oder, da $\int\left(\frac{\beta}{4}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,arc.tg.\frac{dy}{dx}\right)dx = \frac{\beta}{4}\,\frac{dy}{dx}\,arc.tg.\,\frac{dy}{dx} - \frac{\beta}{4}\int\frac{\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx,$

$$\text{und } x\frac{dy}{dx} = \gamma\frac{dy}{dx} - \frac{\left(\alpha - \beta\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx}}{4\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} + \frac{\beta}{4}\frac{dy}{dx}\, arc.\, tg.\, \frac{dy}{dx}$$

ist,

$$y = \varepsilon - \frac{\alpha\frac{dy}{dx} - \beta\frac{dy^2}{dx^2}}{4\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} + \frac{\alpha}{4}\, arc.\, tg.\, \frac{dy}{dx} (II).$$

Eliminirt man nun zwischen (*I*) und (*II*) die Grösse *arc. tg.* $\frac{dy}{dx}$, so kommt $\beta y - \alpha x + \alpha\gamma - \beta\varepsilon = \frac{\left(\alpha - \beta\frac{dy}{dx}\right)^2}{4\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ (*III.*); oder, indem man $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{ds^2}{dx^2}$, und $\alpha\gamma - \beta\varepsilon = \omega$ setzt, $\frac{ds}{dx} = \frac{\alpha - \beta\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{\omega + \beta y - \alpha x}}$; folglich, indem man integrirt, $s = \zeta - \sqrt{\{\omega + \beta y - \alpha x\}}$, welche Gleichung bekanntlich eine Cycloide bezeichnet.

Dass der Flächenraum wirklich ein Minimum wird, lässt sich leicht folgendermassen zeigen.

Es ist

$$\delta^2 V = \int dx \left\{ \frac{\left(4 + 12\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 8\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \frac{d\delta y}{dx}\frac{d^2\delta y}{dx^2} + 2\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3}\left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \right\},$$

welches sich auch folgendergestalt darstellen lässt:

$$\delta^2 V = \int dx \frac{\left(4 + 4\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2$$

$$+2\int dx \left\{ \frac{4\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 4\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} \frac{d\delta y}{dx}\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3} \left(\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right)^2 \right\}.$$

Da nun die Cycloide concav gegen die Axe ist, so ist $\frac{d^2y}{dx}$ beständig negativ. Setzt man daher $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2z}{dx^2}$, so ist $\frac{d^2z}{dx^2}$ beständig positiv, und man erlangt

$$\delta^2 V = -4\int dx \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2z}{dx^2}} \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2 - 2\int dx \left\{ \frac{2\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{d\delta y}{dx} + \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^2\delta y}{dx^2} \right\}^2,$$

welches zeigt, dass V ein Maximum, also jener Flächenraum ein Minimum wird.

Durch Substitution der obigen Werthe geht δV über in . . . .

$\alpha\delta y - \frac{\alpha\frac{dy}{dx}+\beta}{2\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{d\delta y}{dx}$, welches als Gleichung für die Grenzen

$$\alpha\delta y_{(2)} - \frac{\alpha\frac{dy_{(2)}}{db}+\beta}{2\frac{d^2y_{(2)}}{db^2}} \frac{d\delta y_{(2)}}{db} - \alpha\delta y_{(1)} + \frac{\alpha\frac{dy_{(2)}}{da}+\beta}{2\frac{d^2y_{(1)}}{da^2}} \frac{d\delta y_{(1)}}{da} = o \text{ abgiebt.}$$

Fragt man nun unter *allen möglichen* Curven nach der des Minimums; so bekommt man $\alpha = o$, $\beta = o$; mithin, wie man leicht ermittelt, entweder $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = o$, oder $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, weshalb in diesem Sinne kein Minimum vorhanden ist.

Wird aber unter allen Curven, deren Tangenten, jenen beiden, den Abcissen a und b entsprechenden Punkten angehörig, mit einander parallel sind, die des Maximums gesucht; so hat man $\frac{d\delta y_{(2)}}{db} = o$,

$\frac{d\delta y_{(1)}}{da} = o$, und die Grenzgleichung wird dadurch auf $\alpha = o$ zurückgeführt. Alsdann bedarf es noch der Angabe dreier Punkte, durch welche die Curve gehen soll, um die Constanten α, ω, n zu bestimmen.

Wird unter allen Curven, welche für die Abcissen a und b dieselben Ordinaten und Tangenten haben, nach der des Minimums gefragt; so hat man $\delta y_{(2)} = o$, $\delta y_{(1)} = o$, $\frac{d\delta y_{(2)}}{db} = o$, $\frac{d\delta y_{(1)}}{da} = o$, und die vier Constanten α, β, ω, n werden alsdann durch die für y und $\frac{dy}{dx}$ gegebenen, den Abcissen a und b entsprechenden Werthe bestimmt.

Wird endlich die Aufgabe: vier gegebene Punkte durch eine Curve zu verbinden, vermöge welcher der besagte Flächenraum, von dem einen bis zum andern Endpunkte erstreckt, ein Minimum werde; so würden dadurch zwar jene vier Constanten bestimmt, die Bedingung der Grenzgleichung

$$-\frac{\alpha\frac{dy_{(2)}}{db}+\beta}{\frac{d^2y_{(2)}}{db^2}}\,\frac{d\delta y_{(2)}}{db}+\frac{\alpha\frac{dy_{(1)}}{db}+\beta}{\frac{d^2y_{(1)}}{da^2}}\,\frac{d\delta y_{(1)}}{da}=o$$

aber noch zu erfüllen übrig seyn. Nicht also mit Bezug auf alle möglichen Curven, welche durch die gegebenen Punkte gelegt werden können, sondern lediglich mit Bezug auf diejenigen, welche in den beiden Endpunkten dieselben Tangenten haben, ist in diesem Falle, allgemein zu reden, ein Minimum vorhanden.

§. 79.

Eine Curve zu finden, deren Bogen, in seinen Endpunkten den Flächenräumen a und b entsprechend, ein Minimum sei.

Bezeichnet man die Abcisse mit t, die Ordinate mit y, den Bogen mit s, und den Flächenraum mit x; so hat man

$$ds = dx\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}, \qquad y\,\frac{dt}{dx} - 1 = o,$$

weshalb diese Aufgabe unter den §. 63 behandelten Fall gehört. Variirt man daher, nach der dortigen Vorschrift, beide Gleichungen, und addirt sie zusammen, nachdem man letztere mit dem Factor λ multiplicirt hat, so erlangt man, indem man ihre Summe mit $d\delta V$ bezeichnet,

$$\delta V = \int dx \left\{ \lambda\frac{dt}{dx}\delta y + \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}\frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{\frac{dt}{dx}}{\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}} + \lambda y\right)\frac{d\delta t}{dx}\right\}$$

$$= \int dx \left\{\left(\lambda\frac{dt}{dx} - \frac{1}{dx}\,d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}\right)\delta y - \frac{1}{dx}\,d.\left(\frac{\frac{dt}{dx}}{\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}+\lambda y\right)\delta t\right\}$$

$$+ \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}\delta y + \left(\frac{\frac{dt}{dx}}{\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}} + \lambda y\right)\delta t.$$

Als allgemeine Gleichungen des Minimums hat man demnach

$$\lambda\frac{dt}{dx} - \frac{1}{dx}d.\,\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}} = o\ (I),\quad d.\left(\frac{\frac{dt}{dx}}{\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}} + \lambda y\right) = o,$$

oder, indem man letztere integrirt,

$$\frac{\frac{dt}{dx}}{\sqrt{\frac{dt^2}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}} + \lambda y = \zeta,\ (II)$$

wo ζ eine beliebige Constante bezeichnet.

Verbindet man mit (I) und (II) die Gleichung $y\,\frac{dt}{dx} - 1 = o$, (III)

um λ und $\frac{dt}{dx}$ zu eliminiren, so kommt

$$\frac{1}{y^2\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}+y\frac{1}{dx}d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}=\frac{\zeta}{y},$$

welche, indem man sie mit $\frac{\frac{dy}{dx}}{y}dx$ multiplicirt, übergeht in

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y^3\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}+\frac{dy}{dx}d.\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}=\frac{\zeta\frac{dy}{dx}}{y^2},$$

von der die Integral-Gleichung

$$-\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}+\int\frac{dy\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}+\frac{\frac{dy^2}{dx^2}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}-\int\frac{dy\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{dy^2}{dx^2}}}=-\frac{\zeta}{y}-\alpha,$$

oder

$$-\frac{1}{y^2\sqrt{\frac{1}{y}+\frac{dy^2}{dx^2}}}=\frac{\zeta}{y}+\alpha;$$

also

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\zeta}{y}+\alpha\right)^{-2}-y^2}}{y^2}$$

ist. Verbindet man mit dieser die Gleichung (III), so erhält man

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\zeta}{y}+\alpha\right)^{-2}-y^2}}{y};\text{ folglich } dt=\frac{ydy}{\sqrt{\left(\frac{\zeta}{y}+\alpha\right)^{-2}-y^2}}$$

Substituirt man die gefundenen Werthe in dem von dem Integrationszeichen befreiten Theile von δV, so erhält man als Grenzgleichung

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\zeta}{y_{(2)}}+\alpha\right)^{-2}-y^2_{(2)}}}{\frac{\zeta}{y_{(2)}}+\alpha}\delta y_{(2)}-\frac{\sqrt{\left(\frac{\zeta}{y_{(1)}}+\alpha\right)^{-2}-y^2_{(1)}}}{\frac{\zeta}{y_{(1)}}+\alpha}\delta y_{(1)}+\zeta\delta t_{(2)}-\zeta\delta t_{(1)}=o.$$

Fragt man nun unter allen Curven, welche in ihren Endpunkten dieselben Ordinaten haben, nach derjenigen, deren Bogen, einem Flächenraume von gegebener Grösse entsprechend, ein Minimum sei; so ist $\delta y_{(2)}=o$, $\delta y_{(1)}=o$, $\zeta=o$, die Constanten α und β werden alsdann durch die gegebenen Ordinaten bestimmt, und die obige Gleichung verwandelt sich in $dt=\frac{y dy}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-y^2}}$; folglich $t=\beta-\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-y^2}$, und $y=\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-(\beta-t)^2}$, welches bekanntlich einen Kreis bezeichnet.

Endlich findet man $\delta^2 s=\int dx\,\frac{\left(\frac{dy}{dt}\frac{d\delta t}{dx}-\frac{dt}{dx}\frac{d\delta y}{dx}\right)^2}{\left(\frac{dt}{dx}+\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{3}{2}}}$, welches offenbar ein Minimum anzeigt.

§. 80.

Zwischen zweien auf der Oberfläche eines Umdrehungs-Ellipsoids gegebenen Punkten diejenige Curve zu bestimmen, deren Bogen ein Minimum sei.

Bezeichnet man die halben Axen des Sphäroids mit a und b, die rechtwinklichten Coordinaten irgend eines Punktes in dessen Oberfläche, vom Mittelpunkte an gerechnet, mit x, y, z, und nimmt man an, dass die Fläche durch Umdrehung um die Axe b, parallel mit der von x, entstanden sei: so hat man bekanntlich

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}, \text{ und } a^2x^2+b^2(y^2+z^2)-a^2b^2=o.$$

Setzt man hierin $x=r\sin\varphi$, $y=r\cos\varphi\cos\omega$, $z=r\cos\varphi\sin\omega$, wo r den Halbmesser des Sphäroids, φ und ω die Winkel andeuten,

welche derselbe mit den Coordinaten-Ebenen y, z und x, y bildet, wie auch $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$; so erlangt man, indem man φ als absolut-unabhängig betrachtet,

$$s = \int d\varphi \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2} + r^2 \cos\varphi^2 \frac{d\omega^2}{d\varphi^2}}, \quad r^2 (1 - ee\cos\varphi^2) - b^2 = o.$$

Variirt man beide Gleichungen, so kommt

$$\delta s = \int d\varphi \left\{ \frac{r\left(1 + \cos\varphi^2 \frac{d\omega^2}{d\varphi^2}\right)}{\frac{ds}{d\varphi}} - \frac{1}{d\varphi} d.\frac{\frac{dr}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}} \right\} \delta r - \int d.\frac{r^2 \cos\varphi^2 \frac{d\omega}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}}.\delta\omega$$

$$+ \frac{dr}{d\varphi}\delta r + \frac{r^2 \cos\varphi^2 \frac{d\omega}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}}\delta\omega,$$

und $2r(1 - ee\cos\varphi^2)\delta r = o$.

Eliminirt man nun δr zwischen diesen Gleichungen, so kommt

$$\delta s = \int d.\frac{r^2 \cos\varphi^2 \frac{d\omega}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}}.\delta\omega + \frac{r^2 \cos\varphi^2 \frac{d\omega}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}}.\delta\omega$$

von $\varphi = \varphi_{(1)}$ bis $\varphi = \varphi_{(2)}$ erstreckt. Als allgemeine Gleichung des Minimums hat man demnach

$$d.\frac{r^2 \cos\varphi^2 \frac{d\omega}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}} = o, \text{ mithin } r^2 \cos\varphi^2 \frac{d\omega}{ds} = \alpha,$$

$$\text{oder } r^2 \cos\varphi^2\, d\omega = \alpha d\varphi \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2} + r^2 \cos\varphi^2 \frac{d\omega^2}{d\varphi^2}}.$$

Verbindet man mit dieser Gleichung

$$r^2 (1 - ee \cos\varphi^2) - b^2 = o, \frac{dr}{d\varphi} = - r. \frac{ee \cos\varphi \sin\varphi}{1 - ee \cos\varphi^2},$$

um r und dr zu eliminiren, so kommt

$$d\omega = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \sqrt{\frac{\{1 - ee(2 - ee)\cos\varphi^2\}}{\{b^2\cos\varphi^2 - \alpha^2 + e^2\alpha^2\cos\varphi^2\}.\{1 - ee\cos\varphi^2\}}}.$$

Da die Endpunkte der Curve als gegeben angesehen werden, so fällt die Grenzgleichung weg, und die beiden Constanten werden durch eben diese Bedingungen bestimmt.

Bemerkenswerth ist die Gleichung $r^2 \cos\varphi^2 \frac{d\omega}{ds} = \alpha$. Bezeichnet man nehmlich mit $90° - A$ den Winkel, welchen in dem Punkte auf der Oberfläche des Sphäroids, dessen Coordinaten r, φ, ω sind, die Tangenten mit einander bilden, von denen die eine der in Rede stehenden Curve und die andere dem Kreise angehört, den man erhält, wenn man durch den besagten Punkt eine mit der y, z parallele Ebene legt; so hat man offenbar $r \cos\varphi \frac{d\omega}{ds} = \sin A$; folglich

$$r \cos\varphi \sin A = \alpha.$$

Bezeichnet man nun diese Grössen für den Endpunkt mit $r_{(2)}$, $\varphi_{(2)}$, $A_{(2)}$; so hat man

$$r_{(1)} \cos\varphi_{(1)} \sin A_{(1)} = r_{(2)} \cos\varphi_{(2)} \sin A_{(2)}.$$

Bedeuten daher $A^{(2)}_{(1)}$, $A^{(3)}_{(1)}$, $A^{(1)}_{(2)}$, $A^{(3)}_{(2)}$, $A^{(1)}_{(3)}$, $A^{(2)}_{(3)}$ die sechs Winkel an dreien auf einer sphäroidischen Fläche durch kürzeste Linien verbundenen Punkten, deren Coordinaten $r_{(1)}, \varphi_{(1)}$; $r_{(2)}, \varphi_{(2)}$; $r_{(3)}, \varphi_{(3)}$ sind; so hat man

$$r_{(1)} \cos\varphi_{(1)} \sin A^{(2)}_{(1)} = r_{(2)} \cos\varphi_{(2)} \sin A^{(1)}_{(2)},$$
$$r_{(2)} \cos\varphi_{(2)} \sin A^{(3)}_{(2)} = r_{(3)} \cos\varphi_{(3)} \sin A^{(2)}_{(3)},$$
$$r_{(3)} \cos\varphi_{(3)} \sin A^{(1)}_{(3)} = r_{(1)} \cos\varphi_{(1)} \sin A^{(3)}_{(1)};$$

folglich, indem man diese Gleichungen mit einander multiplicirt und die Resultante durch $r_{(1)}. r_{(2)}. r_{(3)} \cos \varphi_{(1)}. \cos \varphi_{(2)}. \cos \varphi_{(3)}$ dividirt,

$$\sin A^{(2)}_{(1)} \sin A^{(3)}_{(2)} \sin A^{(1)}_{(3)} = \sin A^{(1)}_{(2)} \sin A^{(3)}_{(2)} \sin A^{(3)}_{(1)}$$

für jedes sphäroidische Dreieck.

§. 81.

Es sind zwei Curven im Raume gegeben, auf einer von welchen sich ein Körper nach einem bekannten Gesetze der Geschwindigkeit bewegt; man wünscht beide durch eine dritte Linie zu verbinden, vermöge welcher der Körper in Folge der Schwere in der möglich kürzesten Zeit von der einen zur andern gelange, vorausgesetzt, dass die Bewegung auf der dritten Curve mit der Geschwindigkeit angefangen werde, die der Körper im Durchschnittspunkte dieser mit der ersten besitzt, und in einem Mittel geschehe, dessen Widerstand einer gegebenen Funktion der Geschwindigkeit proportional ist.

Bezeichnet man die rechtwinklichten Coordinaten eines beliebigen Punktes der gesuchten Curve mit x, y, z, von denen die erste als vertikal, die beiden übrigen also als horizontal gedacht werden; die Winkel, zwischen der Normale dieses Punktes und den Coordinaten-Axen mit $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, und die Winkel zwischen der Tangente dieses Punktes und den Coordinaten Axen mit $\omega, \omega', \omega''$; die Schwere mit g, den Widerstand des Mittels mit M, den der Curve mit N, den Bogen mit s und die Zeit mit t: so hat man nach geometrischen Grundsätzen;

$$\cos \varepsilon^2 + \cos \varepsilon'^2 + \cos \varepsilon''^2 = 1, (I), \quad \frac{dx}{ds}\cos \varepsilon + \frac{dy}{dx}\cos \varepsilon' + \frac{dz}{dx}\cos \varepsilon'' = 0, (II),$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \omega, \frac{dy}{ds} = \cos \omega', \frac{dz}{ds} = \cos \omega'', (III);$$

und nach dynamischen Lehren

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - M\cos\omega - N\cos\varepsilon, \frac{d^2y}{dt^2} = -M\cos\omega' - N\cos\varepsilon', \frac{d^2z}{dt^2} = -M\cos\omega'' - N\cos\varepsilon''.$$

Multiplicirt man von den drei letzten Gleichungen die erste mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz, und addirt die Resultanten zusammen: so erlangt man, mit Rücksicht auf die Gleichungen (*I*), (*II*) und (*III*),

$$\frac{dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z}{dt^2} = g dx - M ds,$$

folglich
$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2dt^2} = \int (g dx - M ds),$$

und daher
$$t = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{\{2\int (g dx - M ds)\}}},$$

welche Grösse also, von $x = a$ bis $x = b$ erstreckt, ein Minimum seyn muss.

Setzt man nun $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = u$, so ist $u = 2\int (g dx - M ds)$; mithin

$$\frac{du}{dx} - 2g + 2M\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = o, \text{ und } t = \int dx \frac{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx}}}{\sqrt{u}}.$$

Da M eine Funhtion der Geschwindigkeit, folglich auch eine Funktion von u, dem Quadrate der Geschwindigkeit, repräsentirt, so hat man, indem man variirt,

$$\delta t = \int dx \left\{ \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{u}\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}} - \frac{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}}{2u^{\frac{3}{2}}} \delta u \right\},$$

und
$$\frac{d\delta u}{dx} + 2\left(\frac{dM}{du}\right)\delta u \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} + 2M \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}} = o.$$

Multiplicirt man, nach Vorschrift des §'s 63 diese Gleichuug mit dem Factor λ, addirt sie darauf zu δt hinzu, und transformirt den resultirenden Ausdruck; so kommt

$$\delta V = -\int \delta y.\ \mathrm{d}.\ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda M\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}} - \int \delta z\ \mathrm{d}.\ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda M\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}}$$

$$-\int \delta u \left\{ \frac{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}}{2u^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} - 2\lambda\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}u}\right)\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}} \right\} \mathrm{d}x$$

$$+ \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda M\right)}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}}\delta y + \frac{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda M\right)}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}}\delta z + \lambda\delta u + \frac{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}}{\sqrt{u}}\delta x,$$

woraus sich die drei Gleichungen

$$\mathrm{d}.\ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda M\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}} = o,\quad \mathrm{d}.\ \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda M\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}} = o,$$

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}}{2u^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} - 2\lambda\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}u}\right)\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}} = o,$$

ergeben, aus denen, in Verbindung mit

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 2g + 2M\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}} = o,$$

die vier Grössen y, z, u, λ bestimmt werden müssen.

Integrirt man die erste und zweite, so kommt

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda M\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}} = \alpha,\quad \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda M\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}} = \beta,$$

aus der Verbindung von welchen

$$\alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \beta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = o,\ \text{mithin}\ \alpha z - \beta y = \gamma$$

folgt, wo α, β, γ drei beliebige Constanten bezeichnen. Da letztere Gleichung die Gleichung einer auf der von y, z senkrechten Ebene ist, so folgt, dass die gesuchte Curve von einfacher Krümmung und in einer senkrechten Ebene befindlich ist.

Setzt man nun der Kürze wegen $\frac{1}{\sqrt{u}} + 2\lambda M = \varphi\ (I)$, und eliminirt $\frac{dz}{dx}$, so kommt, indem man $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2} = \mu^2$ setzt,

$$\frac{\varphi \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \mu^2 \frac{dy^2}{dx^2}}} = \alpha\ (II),\ \frac{d\lambda}{dx} - \left\{2\lambda \left(\frac{dM}{du}\right) - \frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}\right\}\sqrt{1 + \mu^2 \frac{dy^2}{dx^2}} = 0\ (III),$$

$$\frac{du}{dx} - 2g + 2M\sqrt{1 + \mu^2 \frac{dy^2}{dx^2}} = 0\ (IV).$$

Differenziirt man (I) und (II), so kommt

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{du}{dx}\left\{\frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda\left(\frac{dM}{du}\right)\right\} + 2M\frac{d\lambda}{dx},\quad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\alpha \frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy^2}{dx^2}\sqrt{1 + \mu^2 \frac{dy^2}{dx^2}}};$$

mithin, indem man zwischen diesen und den Gleichungeu (III) und (IV) die drei Grössen $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ und $\left\{\frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda\left(\frac{dM}{du}\right)\right\}$ eliminirt, ...

$$2g\frac{d\lambda}{dx} + \alpha \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy^2}{dx^2}} = 0,$$

von welcher das Integral $2g\lambda = \frac{\alpha}{\frac{dy}{dx}} + \zeta$ ist. Die Elimination von λ, φ und u zwischen dieser Gleichung und (I), (II), (IV) wird eine Gleichung zwischen x und y mit einer neuen Constante η geben, aus welcher sich ferner durch Verbindung mit $\alpha z - \beta y = \gamma$ die Beziehung zwischen x und z ergiebt.

§. 82.

Die Bedingungen der vier obigen Gleichungen als erfüllt betrachtet, reducirt sich δt auf

$$\frac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}}}{\sqrt{u}}\delta x+\frac{\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}+2\lambda M\right)}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}}}\delta y+\frac{\frac{dz}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}+2\lambda M\right)}{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}}}\delta z+\lambda\delta u.$$

Da aber

$$\frac{1}{\sqrt{u}}=\varphi-2\lambda M\,(I),\ 2\lambda M=\frac{2\lambda g-\lambda\frac{du}{dx}}{\sqrt{1+\mu^2\frac{dy^2}{dx^2}}}\,(IV),\ \frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}=\mu^2\frac{dy^2}{dx^2}$$

ist; so ist $\dfrac{\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dx^2}}}{\sqrt{u}}=\varphi\sqrt{1+\mu^2\frac{dy^2}{dx^2}}-2\lambda g+\lambda\frac{du}{dx}$

$$=\frac{\varphi}{\sqrt{1+\mu^2\frac{dy^2}{dx^2}}}+\frac{\varphi\mu^2\frac{dy^2}{dx^2}}{\sqrt{1+\mu^2\frac{dy^2}{dx^2}}}-2\lambda g+\lambda\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{\alpha}{\frac{dy}{dx}}+\alpha\mu^2\frac{dy}{dx}-2\lambda g+\lambda\frac{du}{dx},\ (II);$$

und daher der Werth von δt gleich

$$\left\{\frac{\alpha}{\frac{dy}{dx}}+\alpha\mu^2\frac{dy}{dx}-2\lambda g+\lambda\frac{du}{dx}\right\}\delta x+\alpha\delta y+\beta\delta z+\lambda\delta u,$$

dessen Betrag also von $x=a$ bis $x=b$ gleich Null seyn muss. Da die beiden Grenzen unabhängig von einander sind, so ergeben sich hieraus die Grenzgleichungen

$$\left\{\frac{\alpha}{\frac{dy_{(1)}}{da}}+\alpha\mu^2\frac{dy_{(1)}}{da}-2\lambda_{(1)}g+\lambda_{(1)}\frac{du_{(1)}}{da}\right\}\delta a+\alpha\delta y_{(1)}+\beta\delta z_{(1)}+\lambda_{(1)}\delta u_{(1)}=0,$$

$$\left\{\frac{\alpha}{\frac{dy_{(2)}}{db}} + \alpha\mu^2\frac{dy_{(2)}}{db} - 2\lambda_{(2)}g + \lambda_{(2)}\frac{du_{(2)}}{db}\right\}\delta b + \alpha\delta y_{(2)} + \beta\delta z_{(2)} + \lambda_{(2)}\,\delta u_{(2)} = o.$$

Die erste Grenz-Curve sei gegeben durch die Gleichungen

$$\varphi_{(1)}\,(x, \overset{1}{y}) = o,\ \chi_{(1)}\,(x, \overset{1}{z}) = o,$$

und das Gesetz für die Geschwindigkeit der Bewegung des Körpers längs dieser Curve $u = \Psi\,(x, \overset{1}{y}, \overset{1}{z})$; so hat man nach Seite 135

$$\left(\frac{dy_{(1)}}{da} - \frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da}\right)\delta a + \delta y_{(1)} = o, \left(\frac{dz_{(1)}}{da} - \frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da}\right)\delta a + \delta z_{(1)} = o, \delta u_{(1)} = \left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right)\delta y_{(1)} + \left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{z}_{(1)}}\right)\delta z_{(1)}$$

nachdem in δt mit $\delta y = o$, $\delta z = o$ auch $\delta u = o$ wird; und daher

$$\alpha\delta y_{(1)} + \beta\delta z_{(1)} + \lambda_{(1)}\delta u_{(1)} = \left[-\alpha\mu^2\frac{dy_{(1)}}{da} + \left\{\alpha + \lambda_{(1)}\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right)\right\}\frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da}\right.$$

$$\left. + \left\{\beta + \lambda_{(1)}\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{z}_{(1)}}\right)\right\}\frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da} - \lambda_{(1)}\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right)\frac{dy_{(1)}}{da} - \lambda_{(1)}\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{z}_{(1)}}\right)\frac{dz_{(1)}}{da}\right]\delta a.$$

Substituirt man diesen Werth, und überlegt, dass

$$\frac{du_{(1)}}{da} = \left(\frac{d\Psi}{da}\right) + \left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right)\frac{dy_{(1)}}{da} + \left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{z}_{(1)}}\right)\frac{dz_{(1)}}{da}$$

ist; so geht die Grenzgleichung über in

$$\frac{\alpha}{\frac{dy_{(1)}}{da}} - 2\lambda_{(1)}g + \lambda_{(1)}\left(\frac{d\Psi}{da}\right) + \left\{\alpha + \lambda_{(1)}\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right)\right\}\frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da} + \left\{\beta + \lambda_{(1)}\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{z}_{(1)}}\right)\right\}\frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da} = o. (A)$$

Für die zweite Grenz-Curve seien die Gleichungen

$$\varphi_{(2)}\,(x, \overset{2}{y}) = o, \qquad \chi_{(2)}\,(x, \overset{2}{z}) = o.$$

Alsdann hat man, wie oben,

$$\left(\frac{dy_{(2)}}{db} - \frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db}\right)\delta b + \delta y_{(2)} = o, \left(\frac{dz_{(2)}}{db} - \frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db}\right)\delta b + \delta z_{(2)} = o;$$

mithin $\alpha\delta y_{(2)} + \beta\delta z_{(2)} = \left\{-\alpha\left(\frac{dy_{(2)}}{db} - \frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db}\right) - \beta\left(\frac{dz_{(2)}}{db} - \frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db}\right)\right\}\delta a.$

Substituirt man diesen Werth in der zweiten Grenzgleichung, und überlegt zugleich, dass $\mu^2 \frac{dy_{(1)}}{db} = \alpha \frac{dy_{(2)}}{db} = \beta \frac{dz_{(2)}}{db}$ ist, so geht dieselbe über in

$$\left\{ \frac{\alpha}{\frac{dy_{(2)}}{db}} + \alpha \frac{d^2y_{(2)}}{db} + \beta \frac{d^2z_{(2)}}{db} - 2\lambda_{(2)}\, g + \lambda_{(2)} \frac{du_{(2)}}{db} \right\} \delta b + \lambda_{(2)}\, \delta u_{(2)} = o.$$

Da $\delta u_{(2)}$, durch eine Differenzial-Gleichung gegeben, eine von δy, δz abhängige Integral-Formel enthält; so bleibt diese Grösse beliebig, und die letztere Gleichung zerfällt in

$$\lambda_{(2)} = o, \quad \frac{\alpha}{\frac{dy_{(2)}}{db}} + \alpha \frac{d^2y_{(2)}}{db} + \beta \frac{d^2z_{(2)}}{db} = o,$$ von denen die zweite, da

$$\beta = \frac{\alpha}{\frac{dy_{(2)}}{db}} \frac{dz_{(2)}}{db}$$ ist, zu $$1 + \frac{d^2y_{(2)}}{db} \frac{dy_{(2)}}{db} + \frac{d^2z_{(2)}}{db} \frac{dz_{(2)}}{db} = o \quad (B)$$

führt, aus welcher hervorgeht, dass die gesuchte die zweite Grenz-Curve unter einem rechten Winkel schneidet, wie auch das Gesetz des Widerstandes sei. Die Gleichung $\lambda_{(2)} = o$ dient zur Bestimmung der in λ enthaltenen beliebigen Constante ζ. Es ist nehmlich

$$2g\lambda = \frac{\alpha}{\frac{dy}{dx}} + \zeta; \text{ folglich } o = \frac{\alpha}{dy_{(2)}} + \zeta, \text{ mithin } 2g\lambda = \alpha \left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}} - \frac{1}{\frac{dy_{(2)}}{db}} \right).$$

Hiernach ist $\lambda_{(1)} = \frac{\alpha}{2g} \left\{ \frac{1}{\frac{dy_{(1)}}{da}} - \frac{1}{\frac{dy_{(2)}}{db}} \right\}$, aus welcher, in Verbindung mit (A) und (B) und den übrigen acht, aus den Gleichungen für die drei Curven entspringenden, die sechs Coordinaten der beiden Endpunkte und die vier Constanten α, β, γ, n bestimmt werden müssen.

Setzt man, welches der einfachste Fall ist, $\Psi\,(x, \overset{1}{y}, \overset{1}{z}) = const.$,

so ist $\left(\frac{d\Psi}{da}\right) = o$, $\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right) = o$, $\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{z}_{(1)}}\right) = o$,

und die Gleichung (A) verwandelt sich in

$$\frac{\alpha}{\frac{dy_{(1)}}{da}} - 2\lambda_{(1)}g + \alpha\frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da} + \beta\frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da} = o, \text{ wo } 2\lambda_{(1)}g = \alpha\left(\frac{1}{\frac{dy_{(1)}}{da}} - \frac{1}{\frac{dy_{(2)}}{db}}\right)$$

und $\frac{dy_{(2)}}{da} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{dz_{(2)}}{db}$ ist; mithin $1 + \frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da}\frac{dy_{(2)}}{db} + \frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da}\frac{dz_{(2)}}{db} = o$,

woraus folgt, dass in diesem Falle die Tangenten an den beiden Endpunkten, von denen die eine der gesuchten, die andere aber der ersten Grenz-Curve angehört, rechte Winkel bilden.

Setzt man hingegen die anfängliche Geschwindigkeit gleich derjenigen, die ein Körper erlangt, indem er sich im luftleeren Raum, in Folge seiner Schwere, von einem Punkte, dessen Coordinaten p, q und r sind, längs der Grenz-Curve bewegt; so ist $u = \int 2g\,dx$, von $x = p$ bis $x = x$ erstreckt; mithin

$$u = 2g\,(x - p) = \Psi\,(x, \overset{1}{y}, \overset{1}{z}),$$

folglich $\left(\frac{d\Psi}{da}\right) = 2g$, $\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{y}_{(1)}}\right) = o$, $\left(\frac{d\Psi}{d\overset{1}{z}_{(1)}}\right) = o$,

und die Gleichung (A) geht über in

$$\frac{\alpha}{\frac{dy_{(1)}}{da}} + \alpha\frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da} + \beta\frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da} = o,$$

$$\text{oder } 1 + \frac{dy_{(1)}}{da}\frac{d\overset{1}{y}_{(1)}}{da} + \frac{dz_{(1)}}{da}\frac{d\overset{1}{z}_{(1)}}{da} = o,$$

nach welcher die gesuchte Linie die Grenz-Curve unter einem rechten Winkel schneidet. Es bedarf wohl kaum der ausdrücklichen Bemerkung, dass die Resultate dieses §'s von dem Gesetze des Widerstandes vollkommen unabhängig, mithin allgemein gültig sind.

§. 83.

Um die am Schlusse des §'s 81 besagte Elimination auszuführen, muss M als Funktion von u gegeben seyn. Der Fall, wo $M = o$ ist, oder die Bewegung im luftleeren Raum geschieht, ist unstreitig der einfachste. Alsdann hat man nehmlich

$$\frac{\frac{dy}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{u}}}{\sqrt{1+\mu^2\frac{dy^2}{dx^2}}} = a, \quad \frac{du}{dx} - 2g = o,$$

von welchen Gleichungen die letztere giebt

$$u = 2gx + C;$$

wo C eine von der primitiven Geschwindigkeit abhängige Constante bezeichnet. Setzt man das Quadrat dieser gleich $\Psi(a, \overset{1}{y}_{(1)}, \overset{1}{z}_{(1)})$; so hat man

$$\Psi(a, \overset{1}{y}_{(1)}, \overset{1}{z}_{(1)}) = 2ga + C,$$

folglich

$$u = 2g(x - a) + \Psi(a, \overset{1}{y}_{(1)}, \overset{1}{z}_{(1)}).$$

Die erste der obigen Gleichungen giebt endlich $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \mu^2 u}}$, welche, durch die Substitution des Werthes von u, in die der gewöhnlichen Cycloide übergeht, und §. 51 ausführlich behandelt worden ist. Setzt man $u_{(1)} = \Psi(a, \overset{1}{y}_{(1)}, \overset{1}{z}_{(1)}) = o$, und die Coordinaten des Anfangs- und Endpunktes als gegeben voraus; so kommt man auf den Gesichtspunkt zurück, unter welchem diese Anfgabe zuerst in den *Actis Eruditorum* des Jahres 1696 den damaligen Mathematikern von Johannn Bernoulli, der sie *Brachystochrone* nannte, proponirt wurde. Nach Ablauf der festgesetzten Frist erschienen vier Auflösungen, nehmlich von Newton, Leibnitz, Jakob Bernoulli und de l'Hopital. Die Gleichungen des §'s. 64 betreffen den Fall, wo der Widerstand M der $2n^{ten}$ Potenz der Geschwindigkeit proportional gesetzt wird.

§. 84.

Unter der in §. 81 gemachten Voraussetzung wünscht man diejenige Curve zu bestimmen, längs welcher der fallende Körper in jedem Punkte seiner Bahn die grösste Geschwindigkeit besitzen werde.

Bezeichnet man das Quadrat der Geschwindigkeit mit u, so ist, nach dem so eben erwähnten §.

$$\frac{du}{dx} - 2g + 2M\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = o,$$

wo M irgend eine Funktion von u repräsentirt, und u, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, ein Maximum seyn muss. Variirt man diese Gleichung nach Vorschrift des §'s. 27, multiplicirt diese mit einem Factor λ und integrirt die Resultante; so kommt

$$\lambda\delta u - \int \delta u \left\{ \frac{d\lambda}{dx} - 2\lambda\left(\frac{dM}{du}\right)\sqrt{1 + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} \right\} + \int 2\lambda M dx \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}}$$
$$= C.$$

Bestimmt man λ dergestalt, dass

$$\frac{d\lambda}{dx} - 2\lambda\left(\frac{dM}{du}\right)\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = o \ (I)$$

werde, so geht die Gleichung über in

$$\lambda\delta u + \int 2\lambda M dx \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}} = C.$$

Die fernern Vorschriften des zuletzt erwähnten §'s. beruhen auf der Voraussetzung, dass die Grenzen von u als constant angesehen werden. Folgendes kann daher als eine Verallgemeinerung dieser Methode betrachtet werden.

Die obige Gleichung nehmlich enthält eine Beziehung für δu, so

fern diese Grösse von δy und δz abhängig ist. Bezeichnet man diese mit $\delta u_{\backslash}$, und die Totalität der Variation mit δu; so ist ......
$\delta u = \delta u_{\backslash} + \frac{du}{dx}\,\delta x$, und daher die Gleichung,

$$\lambda \delta u + \int 2\lambda M dx \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}} - \lambda \frac{du}{dx}\delta x = C;$$

folglich $\delta u + C = (\lambda + 1)\delta u - \lambda \frac{du}{dx}\delta x + \int 2\lambda M dx \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}}$.

Bezeichnet man nun $\int 2\lambda M dx \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}}$ für $x = a$ mit $\Gamma_{(1)}$ und für $x = b$ mit $\Gamma_{(2)}$; so erlangt man

$$\delta u_{(2)} - \delta u_{(1)} = (\lambda_{(2)} + 1)\delta u_{(2)} - (\lambda_{(1)} + 1)\delta u_{(1)} + \lambda_{(1)}\frac{du_{(1)}}{da}\delta a - \lambda_{(2)}\frac{du_{(2)}}{db}\delta b + \Gamma_{(2)} - \Gamma_{(1)}$$

oder, da $\Gamma_{(2)} - \Gamma_{(1)} = \int 2\lambda M dx \frac{\frac{dy}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dz}{dx}\frac{d\delta z}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}}$, von $x = b$ bis $x = b$ genommen,

$$\delta u_{(2)} - \delta u_{(1)} = (\lambda_{(2)} + 1)\,\delta u_{(2)} - \lambda_{(2)}\frac{du_{(2)}}{db}\delta b - (\lambda_{(1)} + 1)\,\delta u_{(1)} + \lambda_{(1)}\frac{du_{(1)}}{da}\,\delta a$$

$$- \int \delta y\, d.\frac{2\lambda M \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}}} - \int \delta z\, d.\frac{2\lambda M \frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz}{dx^2}}} + \frac{2\lambda_{(2)} M_{(2)} \frac{dy_{(2)}}{db}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2_{(2)}}{db^2} + \frac{dz^2_{(2)}}{db^2}}}\delta y_{(2)}$$

$$+ \frac{2\lambda_{(2)} M_{(2)} \frac{dz_{(2)}}{db}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2_{(2)}}{db^2} + \frac{dz^2_{(2)}}{db^2}}}\delta z_{(2)} - \frac{2\lambda_{(1)} M_{(1)} \frac{dy_{(1)}}{da}}{\sqrt{1 + \frac{dy_{(2)}}{da^2} + \frac{dz^2_{(1)}}{da^2}}}\delta y_{(1)} - \frac{2\lambda_{(1)} M_{(1)} \frac{dz^2_{(1)}}{da^2}}{\sqrt{1 + \frac{dy^2_{(1)}}{da^2} + \frac{dz^2_{(2)}}{da^2}}}\delta z_{(1)}$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ genommen. Damit nun diese Grösse gleich Null sei, hat man offenbar

$$\mathrm{d}.\frac{2\lambda M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}}=o,\quad \mathrm{d}.\frac{2\lambda M\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x^2}}}=o,$$

$$\text{mithin }\frac{2\lambda M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}}=\alpha,\quad \frac{2\lambda M\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}x^2}}}=\beta;$$

folglich $\beta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=o$, und daher $\beta y-\alpha x=\gamma$; woraus hervorgeht, dass die gesuchte Linie sich in einer, auf der von y, z senkrechten Ebene befindet. Eliminirt man $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ aus den vorigen Gleichungen, so erhält man, $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}=\mu^2$ setzend,

$$\frac{2\lambda M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1+\mu^2\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}}=\alpha,\quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}-2\lambda\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}u}\right)\sqrt{1+\mu^2\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}=o,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-2g+2M\sqrt{1+\mu^2\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2}}=o,$$

aus denen y, u, λ bestimmt werden müssen. Durch eine, der des §'s. 81 analoge Behandlung erhält man

$$2g\lambda=\frac{\alpha}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}+\zeta.$$

§. 85.

In Folge der obigen Gleichungen reducirt sich der Werth von $\delta u_{(2)}-\delta u_{(1)}$ auf

$$(\lambda_{(2)}+1)\,\delta u_{(2)}-\lambda_{(2)}\frac{\mathrm{d}u_{(2)}}{\mathrm{d}b}\,\delta b+\alpha\,\delta y_{(2)}+\beta\,\delta z_{(2)}$$

$$-(\lambda_{(1)}+1)\,\delta u_{(1)}+\lambda_{(1)}\frac{\mathrm{d}u_{(1)}}{\mathrm{d}a}\,\delta a-\alpha\,\delta y_{(1)}-\beta\,\delta z_{(1)},$$

welcher Ausdruck, da die Grenzen unabhängig von einander sind, die Gleichungen

$$(\lambda_{(1)}+1)\,\delta u_{(1)}-\lambda_{(1)}\frac{\mathrm{d}u_{(1)}}{\mathrm{d}a}\,\delta a+\alpha\delta y_{(1)}+\beta\delta z_{(1)}=o,$$

$$(\lambda_{(2)}+1)\,\delta u_{(2)}-\lambda_{(2)}\frac{\mathrm{d}u_{(2)}}{\mathrm{d}b}\,\delta b+a\delta y_{(2)}+\beta\delta z_{(2)}=o$$

verschafft; oder, da $\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2g\lambda-2\lambda M\sqrt{1+\mu^2\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}=\zeta-\alpha u^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ $=\zeta-\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\beta\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ ist, nach den obigen Gleichungen,

$$(\lambda_{(1)}+1)\,\delta u_{(1)}-\left(\zeta-\alpha\frac{\mathrm{d}y_{(1)}}{\mathrm{d}a}-\beta\frac{\mathrm{d}z_{(1)}}{\mathrm{d}a}\right)\delta a+\alpha\delta y_{(1)}+\beta\delta z_{(1)}=o,$$

$$(\lambda_{(2)}+1)\,\delta u_{(2)}-\left(\zeta-\alpha\frac{\mathrm{d}y_{(2)}}{\mathrm{d}b}-\beta\frac{\mathrm{d}z_{(2)}}{\mathrm{d}b}\right)\delta b+\alpha\delta y_{(2)}+\beta\delta z_{(2)}=o.$$

Mit Beziehung auf die erste Grenze hat man, da $u_{(1)}=\Psi(a,\overset{1}{y}_{(1)},\overset{1}{z}_{(1)})$ ist,

$$\delta u_{(1)}=\frac{\mathrm{d}u_{(1)}}{\mathrm{d}a}\,\delta a+\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\overset{1}{y}_{(1)}}\right)\delta y_{(1)}+\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\overset{1}{z}_{(1)}}\right)\delta z_{(1)},$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y_{(1)}}{\mathrm{d}a}-\frac{\mathrm{d}\overset{1}{y}_{(1)}}{\mathrm{d}a}\right)\delta a+\delta y_{(1)}=o,\left(\frac{\mathrm{d}z_{(1)}}{\mathrm{d}a}-\frac{\mathrm{d}\overset{1}{z}_{(1)}}{\mathrm{d}a}\right)\delta a+\delta z_{(1)}=o,$$

Substituirt man diese Werthe, so kommt

$$(\lambda_{(1)}+1)\frac{\mathrm{d}u_{(1)}}{\mathrm{d}a}-(\lambda_{(1)}+1)\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\overset{1}{y}_{(1)}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y_{(1)}}{\mathrm{d}a}-\frac{\mathrm{d}\overset{1}{y}_{(1)}}{\mathrm{d}a}\right)-(\lambda_{(1)}+1)\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\overset{1}{z}_{(1)}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z_{(1)}}{\mathrm{d}a}-\frac{\mathrm{d}\overset{1}{z}_{(1)}}{\mathrm{d}a}\right)$$

$$+\alpha\frac{\mathrm{d}\overset{1}{y}_{(1)}}{\mathrm{d}a}+\beta\frac{\mathrm{d}\overset{1}{z}_{(1)}}{\mathrm{d}a}-\zeta=o.\ (A).$$

Für die zweite Grenze hat man

$$\left(\frac{\mathrm{d}y_{(2)}}{\mathrm{d}b}-\frac{\mathrm{d}\overset{2}{y}_{(2)}}{\mathrm{d}b}\right)\delta b+\delta y_{(2)}=o,\left(\frac{\mathrm{d}z_{(2)}}{\mathrm{d}b}-\frac{\mathrm{d}\overset{2}{z}_{(2)}}{\mathrm{d}b}\right)\delta b+\delta z_{(2)}=o;$$

wodurch die Gleichung übergeht in

$$(\lambda_{(2)} + 1)\,\delta u_{(2)} - \left(\zeta - \alpha\,\frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db} - \beta\,\frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db}\right)\delta a = o,$$

welche, da $\delta u_{(2)}$, eine Integral-Formel enthaltend, unbestimmt bleibt, zu

$$\lambda_{(2)} + 1 = o \text{ und } \zeta - \alpha\,\frac{d\overset{2}{y}_{(2)}}{db} - \beta\,\frac{d\overset{2}{z}_{(2)}}{db} = o \ (B)$$

führt. Die erstere dieser Gleichungen dient zur Bestimmung der in λ enthaltenen Constante ζ. Denn, da $2g\lambda = \frac{\alpha}{\frac{dy}{dx}} + \zeta$ ist, so hat man

$$2g\lambda_{(2)} = \frac{\alpha}{\frac{dy_{(2)}}{db}} + \zeta = -2g \text{ folglich } \zeta = -\left(2g + \frac{\alpha}{\frac{dy_{(2)}}{db}}\right),$$

welche, in Verbindung mit (A) und (B) die beiden Grenzgleichungen darstellt. Für den Fall, wo $\Psi(a, y_{(1)}, z_{(1)}) =$ Const. ist, reducirt sich die Gleichung (A) auf

$$\zeta - \alpha\,\frac{dy_{(1)}}{db} - \beta\,\frac{dz_{(1)}}{db} = o,$$

aus welcher, in Verein mit der Gleichung (B) hervorgeht, dass alsdann die Tangenten an den Grenz-Curven parallel mit einander sind.

Die Gleichung des §'s. 55 betrifft den Fall, wo der Widerstand der $2n^{ten}$ Potenz der Geschwindigkeit proportional gesetzt wird.

Berlin, gedruckt bei Louis Quien,
Kronen-Strasse No. 48.